UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE
DISEI
DIPARTIMENTO DI SCIENZE PER L'ECONOMIA E L'IMPRESA

Working Papers - Economics

Il Modello Stocastico di Crescita con particolare riguardo al consumo

Vinicio Guidi

Working Paper N. 32/2019

DISEI, Università degli Studi di Firenze
Via delle Pandette 9, 50127 Firenze (Italia) www.disei.unifi.it

IL MODELLO STOCASTICO DI CRESCITA CON PARTICOLARE RIGUARDO AL CONSUMO.

1- Introduzione

La teoria stocastica della crescita analizza l'allocazione intertemporale di capitale e consumo in un'economia in cui soprattutto i processi produttivi sono soggetti a disturbi di natura casuale. La teoria affonda le radici in vari contributi che vanno dall'equilibrio generale in condizioni di incertezza alla critica econometrica e ai lavori sul ciclo di Lucas, dai dibattiti di politica economica al modello di crescita ottimale di Ramsey-Koopmans-Cass[1].

Attraverso la ridefinizione della variabile di stato (di solito, lo stock di capitale) si è stato in grado di analizzare un ricco insieme di problemi teorici e applicati, che vanno dallo studio dei cicli economici all'*asset pricing*, senza ignorare l'allocazione delle risorse naturali rinnovabili[2]. L'enfasi sulla risoluzione numerica dei problemi ha consentito alla teoria di fornire importanti contributi alle tecniche numeriche, ora sempre più diffuse.

Per tali motivi, la teoria si sta affermando come uno dei paradigmi centrali della dinamica economica riuscendo a dare risposte, non sempre del tutto soddisfacenti, a problemi importanti, fornendo collegamenti intellettuali con aree, che non erano considerate in precedenza, ma che sono fondamentali per comprendere i processi di sviluppo dei sistemi economici.[3]

Un importante contributo metodologico è costituito dal definitivo affermarsi dei metodi ricorsivi[4], che consentono[5] di tradurre, sotto opportune ipotesi, un problema di massimizzazione dell'utilità attesa su un orizzonte temporale infinito, in una successione di *trade-off* tra utilità corrente e valore attuale dell'utilità dei periodi futuri. In base alle regole di decisione l'agente rappresentativo seleziona le azioni in funzione di un numero limitato di variabili di stato che sintetizzano completamente

---

[1] Olson L-Roy. S. (2006) "Theory of Stochastic Optimal economic Growth" chapter 11 in Dana R-A, Dana, R.-A., Van, C., Mitra, T., Nishimura, K. (Eds.) *Handbook of optimal Growth*, vol.1, Springer , Berlin, 2006, pp.297-395.

[2] Olson L-Roy. S. (2006) op.cit pp.207-208.

[3] Si veda Cooley. T (1997) " Calibrated Models" Oxford Review od Economic Policy, vol13, p.62.

[4] Per tutti si vedano Lucas. R.E- Stokey. N. (1989) *Recursive Methods in Economic Dynamics*, with Prescott. E. C., Harvard University Press. Altug S.- Labadie P. (2008) *Asset pricing for Dynamic Economies*, Cambridge University Press. Ljungqvist L.- Sargent T. (2011) *Recursive Macroeconomic Theory*, third edition, Mitt Press. Il titolo della prima parte è "The imperialism of recursive methods".

[5] Non solo nella macroeconomia, Becker R.A.-Boyd J.III. (1997) *Capital Theory, Equilibrium Analysis and Recursive Utility*. Blackwell, Oxford.

gli effetti delle azioni passate e delle informazioni correnti. La dinamica emerge attraverso l'analisi di due funzioni, la prima esprime la transizione fra lo "stato" presente e quello futuro e la seconda il rapporto sempre fra lo stato attuale e le variabili endogene future. Attraverso una opportuna ridefinizione del concetto di stato si è estesa l'analisi di ricorsività a tante situazioni, ritenute, inizialmente, impossibili da essere formulate in tali termini.[6]Il fatto che le variabili di stato siano una statistica sufficiente spiega l'enfasi posta nell'evoluzione dinamica sui processi stocastici che soddisfano la proprietà di Markov.

Dal momento che la dinamica studia sequenze di vettori casuali che costituiscono delle serie storiche, si istituisce uno stretto collegamento, soprattutto nell'analisi dei cicli economici, con importanti branche dell'econometria "*A dynamic economic model characterizes and interprets the mutual covariation of these components in terms of the purposes and opportunities of economic agents*"[7]

Ora considereremo alcuni modelli analizzati a fondo dalla letteratura. Partiamo dalla dal consumo, poiché contribuisce a comprendere e prevedere fluttuazioni nell'attività economica essendo la componente quantitativa più rilevante della domanda aggregata In prima istanza, partiremo dall'analisi delle scelte di consumo in condizioni di certezza così da comprendere la logica del modello per poi analizzare, in modo rigoroso, l'incertezza riconoscendone l'importanza sul consumo e sul risparmio.

2- Scelta intertemporale in condizioni di incertezza. La Programmazione dinamica.

La teoria moderna del consumo condivide l'idea, comune alla teoria del ciclo vitale di Modigliani-Brumberg e del reddito permanente di Friedman, che l'individuo singolo o una dinastia massimizzino l'utilità relativa all'intero arco di vita sotto il vincolo di bilancio intertemporale. Successivamente Hall[8] ha esteso il modello al caso di incertezza introducendo, tra le altre innovazioni, le aspettative razionali. In questo contesto si suppone che non ci siano vincoli di liquidità e si possa dare e prendere a prestito (con il solo limite della bancarotta) allo stesso tasso di interesse r, tasso che è certo come l'unica attività finanziaria a_t . Non sono considerati, di solito, scambi contingenti: si esclude quindi il tema dell'assicurazione che è cruciale, come il mercato del credito in un contesto intertemporale caratterizzato da incertezza. Solo i redditi da lavoro y_t sono una variabile casuale che è nota all'inizio del periodo t. Il

[6] Kydland f- Prescott E. C.(1977) "Rules than Discretion: The Inconsistency of Optimal Plans" *Journal of Political Economy*, vol. 85, pp.473-492.
[7] Ljungqvist L.- Sargent T. (2011) op.cit pag. XX.
[8] Hall R.E. (1078) "Stochastic Implications of the Lyfe Cycle-Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence" *Journal of Political Economy*, vol. 86, pp. 971-987.

consumatore rappresentativo ha aspettative razionali e al tempo t [9]massimizza la somma fra l'utilità del consumo presente e il valore atteso dell'utilità futura per un numero infinito di periodi. La U (c) è additiva e separabile nel tempo e negli stati di natura e gode delle consuete proprietà, $U'(c) > 0$ e $U''(c) < 0$

$$1)\ max_{c_{t....}} (E_t \sum_{\tau=0}^{\infty} ((1+\rho)^{-\tau})\ U(c_{t+\tau})\ |I_t)$$

$$2)\ \text{s.t.}\ a_{t+\tau+1} = (1+r)(a_{t+\tau} + y_{t+\tau} - c_{t+\tau})\text{per}\ \tau = 0, \dots .\infty$$

utilizzando la programmazione dinamica[10]abbiamo:

$$3)\ V_t(a_t) = \quad max_{c_{t....}} \left(E_t \sum_{\tau=0}^{\infty} ((1+\rho)^{-\tau})\ U(c_{t+\tau})\right)$$

L'equazione 3 rappresenta il valore massimo dell'utilità scontata soggettivamente che si ottiene dalla sequenza ottimale di consumo (variabile di controllo) che scaturisce dalla dotazione iniziale di ricchezza a_t (variabile di stato). Possiamo riformulare il problema (principio di Bellman) nel seguente modo;

$$4)\qquad V_t(a_t) = max_{c_t, a_{t+1}} \{U(c_t) + \frac{1}{1+\rho}\ E_t\left[\left(V_{t+1}(a_{t+1})\right)\right]$$

Dalle condizioni del primo ordine rispetto a c_t e a_t abbiamo:

$$5)\ U'(c_t) = \frac{1+r}{1+\rho} E_t[V'_{t+1}(a_{t+1})]$$

La 5) vale per tutti gli assets per cui "*conditional on consumption choices, the equation offers a theory of asset prices, while, conditional on asset prices, it offers a theory of consumption*"[11]

[9] Per la parte teorica , Deaton A. (1992*) Under standing Consumption*, Clarendon Press, Oxford, Jappelli T.- Pistaferri L: (2000) *Risparmio e scelte intertemporali*. IL Mulino e Bagliano F-B-Bertola G. (2004) *Models for Dynamic Macroeconomics*. Oxford University press.
Per una discussione critica della vasta letteratura empirica e dei risultati teorici, il riferimento obbligato è i Attanasio O.P- Weber G. (2010) "Consumption and Saving: Models of Intertemporal Allocation and Their Implications for Public Policy*", Journal of Economic Literature*, vol.48, pp.693-751.Si vedano anche Browining M- Crossley T.F(2001)" The Life-Cycle of Consumption and Saving", *Journal of Economic Perspectives* , vol.15, pp.3-22, Jappelli T.-Pistaferri L. (2010)" The Consumption Response to Income Changes", *NBER Workin Paper, n. 15739*, pp.1-58. Pignalosa D "The Euler Equation Approach and utility functions: a critical review" http://www.centrosraffa.org/public/9df19fcb-e205-4e8b-98ff-0814d7fe06dc.pdf.pp. 1-11. Pignalosa D.(2017) "The Modern Model of Intertemporal Utility Maximization: Empirical Roots and Theoretical Implications", Storep Conference.pp.1-19.

[10] Sargent T.(1987) *Dynamic Macroeconomic Theory* Harvard University Press, Acemoglu D. (2011) Introduction to modern Economic Growth, Princeton University Press, Stokey N.- Lucas R.E. (1989) op. cit. e Nicola Pavoni (2010)"Notes on Dynamic Methods in Macroeconomic Theory" Research Gate. Le note circolavano già su internet nel 2008.

[11] Deaton A. (1992) op.cit pag.25

6) $V_t'(a_t)$=$U'(c_t)\frac{\partial c_t}{\partial a_t}+\frac{1+r}{1+\rho}E_t\left(V'_{t+1}(a_{t+1})\right)-\frac{1+r}{1+\rho}E_t\left(V'_{t+1}(a_{t+1})\right)\frac{\partial c_t}{\partial a_t}=$

$=\frac{1+r}{1+\rho}E_t\left(V'_{t+1}(a_{t+1})\right)$ per l'equazione 5).

Sempre utilizzando la 5) otteniamo dal teorema di inviluppo:

7) $V_t'(a_t)=U'(c_t)$.
Quindi l'utilità marginale delle attività finanziarie e del consumo sono uguali e intercambiabili.

Infine da 5) e 7) discende la nota equazione di Eulero:

8) $\mathrm{U}'(c_t)=\frac{1+r}{1+\rho}E_t[U'(c_{t+1})]$.

Che esprime la condizione di ottimo intertemporale e descrive l'evoluzione nel tempo dell'utilità marginale.

Per una migliore comprensione dei fondamenti della programmazione dinamica, consideriamo di allocare in modo efficiente le risorse su un orizzonte temporale finito T. Il primo passo, muovendosi a ritroso (*backward induction*), consiste nel massimizzare la funzione obiettivo rispetto alla variabile di controllo del periodo finale c_T, così da calcolarne il valore ottimale c_T^* . Tale valore. che è in funzione dello stato finale a_T, viene, secondo passo, inserito nella funzione di valore $V_T(a_T)$

Nel terzo passo si ripete il procedimento per il periodo T-1, e precisamente:

$V_{T-1}(a_{T-1})$=$max_{c_{T-!},a_{T-1}}\{U(c_{T-1})+\frac{1}{1+\rho}\ E_t\left[\left(V_T\left(f(c_{T-1},a_{T-1})\right)\right)\right]$

Ove a_T=$f(c_{T-1},a_{T-1})$ attraverso il vincolo finanziario. Si calcola Il valore della funzione e si ripete il procedimento fino all'istante iniziale (indicato con V_0 o V_1).

Sotto particolari condizioni, qualunque sia la funzione iniziale V_0(.), nello spazio metrico delle funzioni limitate e continue, si converge a una funzione limite $V=\lim_{t\to\infty}V_t$, che soddisfa l'equazione di Bellman:

9) $V(a)=\max_c U(c)+\frac{1}{1+\rho}V(\breve{a})$ ove $\breve{a}=f(c,a)\ con\ a\ dato$.

Nella letteratura (vedi nota 9) si dimostra che:

a) Esiste una perfetta equivalenza fra le soluzioni delle equazioni1-2 e 4(vedi appendice).

b) Sotto particolari condizioni di regolarità, la soluzione dell'equazione 9 è un'unica funzione V(.) strettamente concava e differenziabile.
c) Se U(c)=log c e i vincoli sono lineari o funzioni Cobb-Douglas (nei modelli business cycles) allora si ottiene una forma ben definita della funzione limite V(.)[12].

In alternativa alla programmazione dinamica Chow[13] ha proposto il metodo dei moltiplicatori di Lagrange che sarebbe più efficiente per analizzare il comportamento di ottimizzazione in quanto evita passaggi non necessari quali il calcolo della funzione di valore. Nonostante la bontà delle sue argomentazioni è il primo metodo quello largamente utilizzato dalla letteratura.

3- **Alcuni limiti della scelta in condizioni di incertezza[14]**.

La massimizzazione dell'utilità attesa è la versione predominante dell'analisi in condizioni di rischio, in cui cioè gli eventi sono caratterizzati da una probabilità oggettivamente definita nota al decisore e di incertezza, dove invece le probabilità sono soggettive e misurano il grado di fiducia che il soggetto associa all'evento. L'assiomatizzazione di Von Neumann-Morgenstern costituisce la prima formalizzazione sistematica delle situazioni di rischio, in cui agli eventi è associata una distribuzione di probabilità oggettiva, ricavata, ad es., dalle frequenze osservabili del fenomento. Le azioni a disposizione del decisore sono definite da lotterie che associano a ogni evento un risultato, che a sua volta può essere costituito da una lotteria. Il soggetto ordina coppie di lotterie possibili grazie a una relazione di preferenza binaria che, oltre alle consuete proprietà di completezza, transitività e continuità, soddisfa l'assioma di indipendenza secondo cui la preferenza fra due lotterie non cambia se a ciascuna aggiungiamo la stessa terza lotteria con la medesima probabilità di verificarsi. Gli assiomi consentono di rappresentare le preferenze indivduali attraverso *l'utilità attesa* di ogni lotteria che è data dal prodotto fra l'utilità di ogni risultato e la probabilità del suo accadere. La teoria di von Neumann-Morgenstern "does not tell us where the probabilities might emerge

[12] Sargent T. (1987) op.cit, Adda J- Cooper R. (2003) *Dynamic Economics*, The Mitt Press. ma soprattutto Bhattaraj K. (2010) Dynamic Programming, Univeristy of Hull, https://lovedoc.org/the-philosophy-of-money.html?utm_source=dynamic-programming-in-economic-models-neoclassical-growth-model-bellman-equation.
[13] Chow G. (1997) Dynamic Economics. Optimization by the Lagrange Method. Oxford University Press., Sargent T. (1987) op.cit pag. 12 e segg. e Gang X.- Lu W. (2014) "A General Setting and Solution of Bellman Equation in Monetary Theory", *Journal of Applied Mathematics*, vol.14, 9 pages..
[14] Si vedano Fishburn Peter C. (1988*) Non Linear Preference and Utility Theory*, The John Hopkins University press, Baltimora, Collier C. (2001) op.cit., Gilboa I. (2009) *Theory of Decision Under Uncertainty*, Cambridge University Press. Montesano A. (2019) " On some aspects of decision theory under uncertainty: rationality, price-probability and the Dutch book argument", *Theory and Decision*, vol 87(1), pp. 57-85.

from if they are not given”[15], per questo è stata estesa e generalizzata a situazioni di incertezza da parte di Savage, cioè ad eventi cui, come è noto, non è associata una probabilità oggettiva. Savage deriva simultaneamente la probabilità e l’utilità dalle scelte osservate che, se risultano coerenti con gli assiomi formulati, è come se il decisore le avesse effettuate massimizzando l’utilità attesa sulla base di una misura di probabilità soggettiva. La differenza importante con la versione di Von Neumann-Morgenstern è costituita dal *“Sure Thing Principle”* che afferma che se è una lotteria A è preferita o indifferente a una lotteria B, sia rispetto a un evento E, che al suo complemento ¬E, allora è almeno buona quanto B. In astratto il principio è molto plausibile però come vedremo ci sono buoni motivi per dubitarne.

Poiché l’aleatorietà è un elemento pervasivo dei mercati finanziari, delle scelte di portafoglio. delle attività di investimento, di produzione e di consumo, non sorprende che, negli ultimi trent’anni, la teoria dell’utilità attesa sia stata sottoposta ad un’attenta disamina critica per l’incoerenza fra comportamento reale e comportamento previsto dalla teoria. Le critiche più rilevanti sono rappresentate dal “*paradosso di Allais*”, relativo all’assioma di indipendenza nella versione di Von Neumann-Morgenstern, e dal “*paradosso di Ellsberg*” che evidenzia come non sia necessariamente soddisfatta l’additività delle probabilità soggettive, pilastro della versione di Savage. Infatti “this paradox highlights the existence of an aversion (or propensity) to situations in which there is uncertainty not only on which outcome will occur but also on which is the possibility of occurence of the events…the decision-maker prefers to bet on the urn of a known composition rather than on the urn of unknown composition”[16]. In entrambi i casi, vi sono soggetti il cui comportamento non è conforme agli assiomi dell’utilità attesa ma scaturisce da preferenze *ragionevoli* in quanto anche se vengono a conoscenza di tale contraddizioni non modificano le scelte fatte e perché la letteratuta ha elaborato assiomi *ragionevoli* che le giustificano teoreticamente[17]. Successivamente, diversi ricercatori, come Twersky e i premi nobel, Kahneman e Thaler, hanno evidenziato attraverso una serie di esperimenti convincenti la discrepanza fra teoria e realtà.

E’ pertanto comprensibile che molte ricerche cognitive cerchino di accertare se gli indivisìdui siano o meno razionali, visto che hanno poteri di calcolo e di elaborazione delle informazioni piu limitati rispetto a quanto presupposto dal paradigma neoclassico dominante. Limiti che li inducono ad impiegare procedure

---

[15] Gilboa I-Postlewaite A.W.-Schmeidler D. (2008) “Probability and Uncertainty in Economic Modelling” *Journal of Economic Perspectives*, vol.22, p.175.
[16] Montesano A. (2019) op.cit., pp.58-59.
[17] Montesano A. (2019) op.cit., p.60.

cognitive semplificate che, per Simon[18], sono manifestazioni razionali della loro capacità di adattamento, ma in quanto comportano errori e *bias*, sono possibili sintomi di irrazionalità per Kahneman. Ma il problema è che"these models were never axiomatized, which could have served as a warning signal that something was wrong".[19]

Sono stati così elaborati modelli assiomatici, noti in letteratura come "*non-expected utility theories*", che modificano o indeboliscono gli assiomi tradizionali così da tenere conto della problematica sollevata dai paradossi. Questi modelli non sono unanimente accettati, in quanto non forniscono una risposta a molti problemi di incertezza, a differenza di quanto accade con il paradigma dominante, che è pertanto ancora largamente utilizzato.[20]

Vi sono due ulteriori limiti metodologici all'utilizzo dell'utilità attesa con tempi separabili. Il primo è rappresentato dall'uguaglianza fra elasticità di sostituzione intertemporale e il reciproco del coefficiente relativo di avversione al rischio poiché "At the level of fundamental principles, risk aversiona and diminishing marginal utility of wealth, which are synonimous under expected utility theory, are horses of different colors".[21] Vedremo , in seguito, come, in base ai dati dei mercati delle attività finanziarie sia necessario un elevato valore del coefficiente relativo di avversione al rischio per accordarsi con l'alto premio al rischio. Ma ciò implica un basso saggio di sostituzione intemporale e, quindi, un elevato tasso di interesse esente dal rischio in contrasto con l'evidenza empirica.[22] Il secondo limite è rappresentato dal fatto che nel modello standard è indifferente per il decisore la tempistica di risoluzione della situazione di incertezza. La realtà è più complessa, se pensiamo, ad es., ad analisi mediche che possono generare sconforto o speranza e comunque sempre ansia ebbene può accadere che un indivduo preferisca avere il responso prima possibile, mentre un altro invece preferisca ricevere il responso il piu tardi possibile. Le preferenze del modello devono essere sufficientemente flessibili da inglobare entrambe le situazioni. I due limiti su indicati si possono dimostrare utilizzando un modello semplice a due periodi con la funzione di utilità $E[u(c_0) + \beta u(c_1)]$, ove c_0 è il consumo al tempo zero e c_1 è una variabile stocastica che rappresenta il consumo al tempo 1. Ora mentre per il primo limite

[18] Simon H. (1958) *Il comportamento amministrativo*, il Mulino, Bologna.

[19] Wakker PP. (2004) "Preference Axiomatizations for Decisions Under Uncertainty", p. 22 in Gilboa I. (eds) *Uncertainty in Economic Theory: Essays in Honor of David Schmeidler's 65th Birthday*. Routledge, London.

[20] Gollier C. (2001) op.cit. p.14.

[21] Yaari M. (1987) "The dual theory of choice under risk", *Econometrica* , vol.55, p.95.

[22] Miao J. (2014) *Economic Dynamics in discrete time*, The Mitt Press, p.676

rimandiamo a Gollier,[23]per il secondo si supponga che si lanci una moneta al tempo zero, se esce testa il soggetto consuma c_0 e c_1^1 nei due periodi mentre se esce croce ottiene c_0 e c_1^2con $c_1^1 \neq c_1^2$. Se il consumo al tempo zero è sempre c_0 ma la moneta viene lanciata al tempo 1 con gli stessi possibili risultati c_1^1 e c_1^2allora il valore atteso calcolato al tempo zero è lo stesso nelle due situazioni[24]. Naturalmente qui abbiamo solo indicato che c'è indifferenza rispetto a risolvere l'incertezza al tempo zero o uno il modello formale completo è più complesso e rimandiamo alla letteratura[25]

I limiti metodologici sono stati rimossi da Kreps e Porteus con una nuova struttura assiomatica ricorsiva, che ispirata da Koopmans, e generalizzata, in particolare, da Epstein e Zin, consente di distinguere fra preferenza per il tempo e atteggiamento verso il rischio e stabilisce le condizioni formali per decidere quando sia preferibile risolvere nel tempo la situazione di incertezza[26].

Infine, un'ulteriore limitazione è legata all'ipotesi di preferenze separabili e additive nel tempo indipendentemente dal fatto che vi sia o meno incertezza. Tali preferenze precludono la possibilità di incorporare abitudini e beni durevoli e implica che l'utilità marginale di un bene sia indipendente dal consumo di ogni altro bene[27].

4- **La dinamica del consumo, del risparmio e del reddito[28].**

L'equazione di Eulero è la condizione del primo ordine nell'ottimizzazione dinamica. A partire dagli anni '80[29], ha un ruolo fondamentale, in quanto si può adattare a diverse situazioni interessanti senza richiedere una conoscenza dettagliata del contesto stocastico, del sistema finanziario e consente di limitare l'orizzonte economico a due periodi. Riprendiamo pertanto l'equazione 8:

$$U'(c_t) = \frac{1+r}{1+\rho} E_t[U'(c_{t+1})].$$

Poiché l'utilità marginale è decrescente l'equazione implica che se $r > \rho$ conviene risparmiare e aumentare il consumo nel tempo, nel caso opposto è ottimale

[23] Gollier C. (2001) op.cit pp.297-299.
[24] Miao J. (2014) op.cit. 676.
[25] Gollier C. (2001) op.cit. pp. 299-303,Danthine J.P- Donaldson (2014) *Intermediate Financial Theory*, third edition, North Holland, pp.131-133. Miao J. (2014) op.cit. pp 701-704.
[26] Becker R.A.-Boyd J.III. (1997) op.cit., Collier C. (2001) op.cit., Backus D.K-Routledge B.R. –Zin S. E. (2005) " Exotic preferences for Macroeconomists", in Gertler M- Rogoff K. (eds), *NBER Macroeconomics Annua*l, 2004, vol.19, pp.319-414.
[27] Jappelli T.- Pistaferri L: (2000) op.cit.
[28] Qui seguiamo molto Bagliano F-B-Bertola G. (2004) op.cit.
[29] Hall R. (1978) op.cit..

consumare di più nel periodo presente. Infine, quando i tassi sono uguali, il consumo rimane costante nel tempo. In quest'ultimo caso l'utilità marginale segue un processo stocastico di martingala.

Tutte le informazioni importanti sono riassunte nell'utilità marginale della ricchezza, grandezza che non è osservabile, per cui, al fine di *testare* il contenuto empirico della teoria e stimare i parametri delle preferenze intertemporali, si è derivata esplicitamente la funzione del consumo. E' noto come l'entità degli effetti sia legata al grado di concavità della funzione U(c) da cui dipende il grado di avversione al rischio. Se infatti consideriamo la tipica funzione di utilità *CRRA* $U(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, dove il coefficiente di avversione al rischio relativo $\frac{U''(c)c}{U'(c)}$ risulta essere γ, abbiamo:

$$\left(\frac{c_{t+1}^{\gamma}}{c_t^{\gamma}}\right) = \frac{1+r}{1+\rho}$$

Passando ai logaritmi, otteniamo infine $\Delta \log c_{t+1} = \frac{1}{\gamma}(r-\rho)$.

γ, che è il reciproco dell'avversione al rischio, misura l'effetto delle variazioni del tasso di interesse sul tasso di crescita dei consumi e costituisce l'elasticità di sostituzione intertemporale; il risultato difficilmente accettabile Da un punto di vista economico è difficilmente accettabile che sia costante per qualunque livello di consumo.

E' soprattutto la funzione di consumo utilizzata da Hall che ha attratto l'attenzione degli economisti. Se la funzione di utilità U(c) è quadratica cioè $U(c_t) = ac_t - \frac{b}{2}c_t^2$ l'utilità marginale è lineare e allora sappiamo che il valore atteso dell'utilità marginale è uguale all'utilità marginale del valore atteso e quindi, con aspettative razionali, in questo caso Hall con aspettative razionali ottiene:

9) $c_{t+1} = c_t + \varepsilon_{t+1}$ ove $E_t\{\varepsilon_{t+1}|I_t\} = 0$.

Quindi il consumo segue un processo stocastico di martingala per cui vale:

10) $E_t c_{t+1} = c_t$

Da tale formulazione risulta che la variazione del consumo fra t e t+1 non è prevedibile sulla base dell' informazione disponibile al tempo t e gli errori risultano *ortogonali* all'insieme di informazione. Il modello è noto in letteratura come equivalente certo perché la soluzione ottimale è ottenuta come se il consumo futuro fosse certo e uguale al valore atteso. Le preferenze quadratiche presentano vari limiti, che sono ben noti, ma è, soprattutto, nelle decisioni finanziarie che il coefficiente assoluto di avversione al rischio crescente risulti in contrasto con l'evidenza empirica.

Ripartiamo dal vincolo di bilancio intertemporale:

11) $\frac{1}{1+r}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{i} c_{t+i} = \frac{1}{1+r}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{i} y_{t+i} + A_{t+i}.$

Tale vincolo è soddisfatto in termini di aspettative per cui ricordando la 10) e le proprietà delle serie geometriche risulta:

12) $c_t = r\left(A_t + \frac{1}{1+r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{i} E_t y_{t+i}\right) = r(A_t + H_t) = y_t^p.$

Quindi, Il consumo è uguale al reddito permanente che è costituito dal rendimento costante della ricchezza complessiva,. cioè della ricchezza finanziaria A_t e della ricchezza umana H_t, quest'ultima calcolata sulla base delle aspettative dei redditi da lavoro. Questa funzione del consumo non sia soggetta alla critica econometrica di Lucas come lo sarebbe se si fondasse sul reddito corrente, dal momento che cambiare le regole di politica economica potrebbe mutare i parametri di persistenza nel tempo degli shock relativi al reddito.[30]

L'andamento temporale del consumo coincide con l'andamento del reddito permanente per cui

13) $y_{t+1}^p - E_t y_{t+1}^p = r(H_{t+1} - E_t H_{t+1})$. Ora dal momento che il reddito permanente e consumo coincidono , in base alla 10 risulta

14) $E_t y_{t+1}^p = y_t^p$. In tal modo possiamo determinare l'evoluzione del reddito permanente e quindi del consumo

15) $y_{t+1}^p = y_t^p + r\left[\frac{1}{1+r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{i}(E_{t+1} - E_t)y_{t+i}\right]$

16) $c_{t+1} = c_t + r\left[\frac{1}{1+r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{i}(E_{t+1} - E_t)y_{t+i}\right] = c_t + \epsilon_{t+1}$

Ciò permette di chiarire il significato economico dell'errore nella funzione del consumo 9.

Il reddito disponibile y_t^D è costituito dal reddito corrente da lavoro y_t e dal rendimento della ricchezza finanziaria quindi:

[30] Jappelli. T-Pistaferri L. (2000) op.cit..pp. 80-82.

17) $y_t^D = rA_t + y_t$ per cui il risparmio $s_t = y_t^D - c_t = y_t^D - y_t^p$ è dato dalla differenza fra il reddito corrente e quello permanente, cioè dal reddito *transitorio*. In termini formali risulta:

18) $s_t = -\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r}\right)^i E_t(y_{t+i} - y_{t+i-1})$

L'equazione 18 mostra che il consumatore risparmia per far fronte a diminuzioni attese dei redditi da lavoro (*savings for a rainy day*).

5- Problemi Empirici- Possibili Risoluzioni dei puzzles: il ruolo del Risparmio Precauzionale .

Poiché dai. dati macroeconomici americani emergeva, corroborando le predizioni formulate da Hall, che consumo e reddito ritardati influenzano il consumo corrente, è naturale che si sia prodotta una vasta letteratura volta a valutare criticamente le conclusioni raggiunte. La formulazione proposta da Hall è stata contraddetta in diversi aspetti e si sono originati alcuni *puzzles* noti in letteratura come: a) *excess sensitivity*; b) *excess smoothness*; c) *hump in the age profile in consumption*; d) *retirement puzzle*; e) *equity premium puzzle*.[31]

Per quanto concerne l' *excess sensitivity* Flavin[32] , elaborando quello che ormai è noto come il test di sensibilità al consumo, ha utilizzato i vincoli teorici del processo di martingala e, assumendo che il reddito segua un processo AR(8), ha ottenuto dei risultati che indicano come il consumo, contrariamente a quanto sostenuto teoricamente, sia sensibile alle variazioni del reddito atteso. Un test simile è stato proposto da Campbell e Mankiw,[33] la cui analisi ha svolto un ruolo preminente nel confutare le conclusioni di Hall. Sulla base dei dati macroeconomici statunitensi, i due autori le variazioni logaritmiche del consumo sui tassi di interesse e sulle variazioni del logaritmo del reddito disponibile: il loro contributo originale sta nell'interpretare il coefficiente del reddito atteso come la percentuale dei consumatori che non seguono l'approccio neoclassico ma spendendo il reddito corrente si possono considerare "consumatori keynesiani". Da notare che la loro percentuale è pari al 45%! Un'altra spiegazione dell'*excess sensitivity* è costituita dall'esistenza di vincoli di liquidità. Qualora risultino stringenti l'equazione di Eulero diventa:

[31] Pignalosa D.(2017) op.cit. pag.1.
[32] Flavin M. (1981) "The Adjustment of Consumption to Changing Expectations About Future Income", *Journal of Political Economy*, vol. 89, Pp.974-1009. Si veda Jappelli. T-Pistaferri L. (2000) op.cit..pp. 88-89.
[33] Campbell, J.Y.- Mankiw, N.G. (1989) "Consumption, Income, and Interest rates: Reinterpreting the Time Series Evidence", in Blanchard O.J.- Fischer S., (eds) *NBER Macroeconomics Annual*, 4, pp.185-216.

19)) $U'(c_t) > \frac{1+r}{1+\rho} E_t[U'(c_{t+1})]$.

Ciò implica che il soggetto vorrebbe aumentare il consumo corrente ma non è possibile in quanto non ha liquidità sufficiente e non può indebitarsi al tasso di interesse. E' interessante notare che la possibilità, che tali vincoli possano manifestarsi, comporta che il consumo risulti ,comunque, modificato anche nei periodi in cui i vincoli non sono stringenti e l'equazione di Eulero sia soddisfatta. Un modo diretto per accertare l'esistenza di vincoli è quello[34] di chiedere ai consumatori se hanno .ricevuto rifiuti nell'erogazione del credito. Jappelli stima che, nel 1982, fossero il 12,5%. Naturalmente bisognerebbe accertare se esistono fondati motivi per il rifiuto o se sentendosi scoraggiati non hanno nemmeno fatto richiesta di prestiti. Zeldes[35], ipotizzando che giovani o consumatori con bassi livelli di assets liquidi incontrino tali vincoli, ha utilizzato il rapporto fra ammontare degli assets e il reddito come segnale, meno diretto, dell'esistenza di tali vincoli.

Strettamente legato all'*excess sensitivity* risulta quello opposto di *smoothness* del consumo. Secondo Hall, infatti, il consumo dovrebbe reagire solo a variazioni non attese del reddito; i dati invece mostrano come il consumo non reagisca abbastanza a tali variazioni. Diversi autori hanno analizzato questo puzzle. Si segnala in particolare il contributo di Campbell e Deaton[36] perché, oltre all'analisi econometrica, dimostrano come i due eccessi siano spiegabili congiuntamente sulla base delle stesse condizioni formali, anche se legati a variazioni diverse del reddito (attese e non attese) "*In fact, any variation of income is made up of a predicted component and a (unpredictable) innovation: if the consumer has an "excessive" reaction to the former component, the intertemporal budget constraint forces him to react in an "excessively smooth" way to the latter component of the change in current income*".[37]

Un importante risultato del modello è che il consumo ottimale segue un andamento temporale differenziato rispetto al reddito corrente in quanto le sue fluttuazioni si possono smorzare prendendo e dando a prestito al tasso di interesse, anche se Carroll

[34] Jappelli T. (1990)"Who is Credit Constrained in the U:S: Economy*?" Quarterly journal of Economics*, vol.105, pp.219-

234.

[35] Zeldes S:F: (1989) "Consumption and Liquidity Constraints: An Empirical Investigation" journal of Political Economy, vol.97, pp. 305-396.
[36] Campbell J.- Deaton A. (1989) " Why is Consumption So Smooth?" *Review of Economic Studies*, vol. 56, pp. 357-373.
[37] Qui seguiamo molto Bagliano F-B-Bertola G. (2004) op.cit pag.22.

e Summers [38] documentano, usando i dati micro, la concordanza fra i due sentieri temporali: entrambi crescono nella parte lavorativa, raggiungono un picco pochi anni prima del pensionamento per poi declinare.

Tutto ciò implica che il consumo segua da vicino l'evoluzione del reddito e che i consumatori tendano ad accumulare un limitato stock di attività finanziarie *(buffer-stock savings*).

I risultati dell'analisi empirica hanno portato all'abbandono del modello dell'equivalente certo, infatti l'assenza della derivata terza non consente cha abbia un ruolo il risparmio precauzionale[39]che contribuisce a spiegare l'insufficiente decumulazione della ricchezza da parte delle generazioni anziane (il *buffer stock savings*),e l'elevata correlazione tra consumo e reddito per le generazioni più giovani, (*l'excess smoothness*) dovuta alla maggiore incertezza sui redditi futuri che spinge a risparmiare di più. smussando l'andamento del consumo rispetto al reddito[40]. Poiché in questo caso l'utilità marginale è convessa, cioè $U''(c) < 0 \; e \; U'''(c) > 0$, allora risulta

20) $E_t[U'(c_{t+1})] > U'(E_t[c_{t+1}])$ Tutto ciò implica che non possa essere soddisfatta l'equazione 10, altrimenti risulterebbe:

21)$U'(c_t)$=$U'(E_t[c_{t+1}]) < E_t[U'(c_{t+1})]$ violando così l'equazione di Eulero. Quindi c_t deve essere minore rispetto al consumo del modello con equivalente certo.

22) $E_t c_{t+1} > c_t$

Poiché[41] un soggetto è prudente se e solo se l'utilità marginale è convessa, dove la prudenza (relativa) è definita da CPR= $-\frac{U'''(c)\,c}{U''(c)}$, espandiamo l'equazione di Eulero secondo la formula di Taylor fino al secondo ordine intorno a c_t :

23)$E_t[U'(c_{t+1})] \approx E_t\left[U'(c_t) + U''(c_t)(c_{t+1} - c_t) + \frac{1}{2}U'''(c_{t+1} - c_t)^2\right]$

$$\approx U'(c_t) + U''(c_t)E_t[(c_{t+1} - c_t)] + \frac{1}{2}U'''E_t[(c_{t+1} - c_t)^2]$$

Ricordando l'equazione di Eulero sotto l'ipotesi semplificatrice che r=ρ, abbiamo:

---

[38] Carroll C.D.-Summers L.H. (1991") Consumption growth parallels income growth: Some new evidence", Bernheim B.D.-Shoven J.B (eds) *National saving and Economic Performance*, University of Chigago Press, pp. 305-348.
[39] Bagliano F-B-Bertola G. (2004) op.cit pp. 36-44.
[40] Bagliano F-B-Bertola G. (2004) op.cit pag.44.
[41] Gollier C.(2001) op.cit. Proposition 61 pag.237.

24) $U'(c_t) = U'(c_t) + U''(c_t)E_t[(c_{t+1} - c_t)] + \frac{1}{2}U'''E_t[(c_{t+1} - c_t)^2]$ per cui semplificando, dividendo per c_t e per U'' risulta:

25) $E_t\left[\left(\frac{c_{t+1}-c_t}{c_t}\right)\right]=-\frac{1}{2}\frac{U'''(c_t)}{U''(c_t)}c_tE_t\left(\frac{c_{t+1}-c_t}{c_t}\right)^2=\frac{1}{2}CPRE_t\left(\frac{c_{t+1}-c_t}{c_t}\right)^2$. In altre parole il coefficiente di prudenza relativa insieme a una specie di varianza del consumo determina il valore atteso del tasso di variazione del consumo .

E' interessante sottolineare che,abbandonando il modello dell'equivalente certo, i fatti empirici, che inizialmente erano stati visti in contrasto con le predizioni della teoria, hanno ricevuto una spiegazione convincente nel modello standard con opportune estensioni e modifiche, per cui non è stata abbandonata l'equazione di Eulero e soprattutto la logica dell'ottimizzazione intertemporale. L'introduzione di variabili demografiche che influenzano la funzione del consumo ha consentito di generare le fluttuazioni nel consumo e il diverso andamento secondo l'età dei soggetti. Con la rimozione dell'ipotesi di separabilità fra tempo libero e consumo si è prodotta la correlazione fra crescita del consumo ed ore lavorate e quindi del reddito giustificando *l'excess sensitivity* . Anche per il *retirement puzzle* ci sono spiegazioni convincenti. Se la funzione di utilità dipende da vari beni di consumo e dal tempo libero possono entrare in gioco i temi cari a Ghez e Becker sulla produzione di servizi all'interno della famiglia, poi la considerazione che, in seguito al pensionamento, si possono risparmiare spese di trasporto, di alimentazione, vestiario ecc. richieste dal lavoro svolto, e che il maggiore tempo libero possa essere impiegato in lavori di giardinaggio, piccole riparazioni, lavanderia a casa ecc. con evidenti risparmi può costituire una valida giustificazione della caduta dei consumi[42].

5- "**Equity Premium" puzzle[43].**

La rimozione dell'utilità quadratica ha portato in primo piano, con il risparmio precauzionale, il tema dell'allocazione del risparmio fra più titoli. Come è noto il loro valore è aleatorio e si devono quindi abbandonare le ipotesi, fino ad ora mantenute, di una sola attività finanziaria e per giunta certa. I legami fra mercati finanziari e

---

[42] Si vedano in dettaglio Attanasio O. P.- Weber G. (2010) op.cit e Pignalosa D.(2017) op.cit

[43] Oltre alla letteratura citata nelle note 4-9-10 si vedano Cochrane J. H. (2005) *Asset Pricing*, Princeton University Press, revised edition (In particolare il chp. 1), Campbell J.Y. (2003)" Consumption-Based Asset Pricing", chp. 13 in Constantinides G.M.-Harris M- Stulz R. (eds) *Handbook of the Economics and Finance*, North Holland, pp.801-885. C) " Financial Markets and The Real Economy", chp. 7in Mehra R. (ed.) *Handbook of the Equity Risk Premium*, North Holland, pp.237- 330 e Gourinchas P.O. (2015) "Notes for Econ202A: Consumption", UC Berkeley. Gourinchas, Bagliano F-B-Bertola G. (2004) op.cit pp.29-34 e Altug S.- Labadie P. (2008) op.cit, chp. 8 contengono l'esposizione più accessibile.

macroeconomia sono importanti : come argomenta Cochrane "*the centerpieces of dynamic macroeconomics are the equations of savings to investment, the equation of marginal rates of substitution to marginal rates of transformation, and the allocation of consumption and investment across time and states of nature. Asset markets are the mechanism that does all this equating...In fact, the first stab at this piece of economics is a disaster, in a way first made precise by the "equity premium" puzzle*"[44] Si è prodotta così una frattura, da un lato molti macroeconomisti hanno abbandonato i temi legati ai mercati finanziari, etichettati come folli, in quanto dominati da *fads and fashions* e non da fatti reali,e siano ritornati ad analizzare i classici modelli market-clearing, che sono in palese contrasto con la realtà economica finanziaria. Dall'altro gli economisti finanziari non si fidano dei modelli *asset pricing* elaborati dai macroeconomisti per l'eccessivo margine di errore. Cerchiamo di capire come sia possibile questa assurda divisione.

Consideriamo il problema di scelta intertemporale di un generico consumatore che può acquistare n attività finanziarie che indicheremo con l'indice j=1,…. n esistenti sul mercato. Per ogni attività finanziaria j-sima, realizza tra t e t+1 un rendimento lordo di $\left(1+r_{t+1}^{j}\right)$, che al tempo t è stocastico e noto solo al tempo t+1.

Avremo quindi n equazioni di Eulero:

26) $\mathrm{U}'(c_t)=\frac{1}{1+\rho}E_t\left[\left(1+r_{t+1}^{j}\right)U'(c_{t+1})\right] per\ j=1,2,\dots,n.$

Dal momento che $\mathrm{U}'(c_t)$ è certo e positivo possiamo dividere entrambi i membri e otteniamo:

27) 1= $E_t\left[\left(1+r_{t+1}^{j}\right)\frac{1}{1+\rho}\frac{U'(c_{t+1})}{U'(c_t)}\right]$=$E_t\left[\left(1+r_{t+1}^{j}\right)M_{t+1}\right]$ ove $M_{t+1}=\frac{1}{1+\rho}\frac{U'(c_{t+1})}{U'(c_t)}$ è conosciuto come *fattore di sconto stocastico,* talvolta come *pricing kernel* o *change of measure*. E' il saggio marginale di sostituzione intertemporale del consumatore, cioè il saggio a cui è disposto a sostituire il consumo al tempo t+1 con il consumo al tempo t.

Per comprendere le implicazioni dell'equazione 27 é utile scrivere il valore atteso di un prodotto come il prodotto dei valori attesi più la covarianza per cui

28) $1+E_t\left[\left(r_{t+1}^{j}\right)\right]=\frac{1-Cov\left[r_{t+1}^{j},M_{t+1}\right]}{E_t[M_{t+1}]}$ la cui interpretazione è semplice un asset ha un valore atteso elevato quando ha una covarianza negativa con il *pricing kernel*,

[44] Cochrane J. H. (2008) op.cit. p.240.

In altre parole, come giustamente sottolinea Cochrane, non è la variabilità di un titolo che rileva ma la covarianza!

L'equazione 28 vale anche nel caso nel caso di un titolo non rischioso il cui rendimento è indicato r_{t+1}^{f} . Poiché è certo, la covarianza è nulla e allora abbiamo:

29) $1 + r_{t+1}^{f} = \frac{1}{E_t[M_{t+1}]}$, il che implica che l'equazione 28 possa essere scritta come:

30) $1 + E_t\big[\big(r_{t+1}^{j}\big)\big] = \big(1 + r_{t+1}^{f}\big)\big(1 - Cov\big[r_{t+1}^{j}, M_{t+1}\ \big]\big)$.

Per la verifica empirica[45] è stato ipotizzato che la funzione di utilità sia del tipo CRRA $U(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, che la distribuzione di probabilità congiunta del tasso di crescita del consumo e del rendimento delle attività fosse lognormale, per cui ,attraverso vari passaggi, utilizzando logaritmi e consuete approssimazioni otteniamo:

31) $E_t r_{t+1}^{j} - r_{t+1}^{f} = -\frac{\sigma_j^2}{2} + \gamma\sigma_{jc}$ ove $\sigma_j{}^2$è la varianza del rendimento, γ il coefficiente di avversione relativa al rischio e σ_{jc}la covarianza fra rendimento e variazione del consumo e $E_t r_{t+1}^{j} - r_{t+1}^{f}$ misura il premio per il rischio: poiché è documentato empiricamente che è pari al 6% per essere riprodotto dal modello occorre, con dati realistici, un coefficiente di avversione così grande da essere privo di ogni plausibilità. Questo è *l'equity premium puzzle*, a cui è collegato il *risk-free puzzle* : con dati plausibili il tasso privo di rischio compatibile con le risultanze del modello richiede un tasso di preferenza intertemporale ρ negativo!.

Possibili soluzioni ai puzzles sono state ricercate estendendo e modificando il modello:dalla separazione ,già indicata, fra valutazione del rischio e del tempo, all'abbandono[46], soprattutto, della separabilità temporale dell'utilità, come è accadutoper gli *habits*.

6- Mercati Completi

Le possibili scelte di consumo in un contesto intertemporale sono legate agli scenari di mercato in cui vengono regolati i rapporti economici relativi a credito e assicurazione. In gran parte, finora, abbiamo supposto che vi fosse un solo asset con

[45] Si vedano i riferimenti nella nota 31, per la parte statistica Palomba G. (2015) *Elementi di Statistica per l'Econometria*, Clua Edizioni Ancona, terza edizione.
[46] Campbell J:Y:-Cochrane J:H: (1999)" By Force of Habit: A Consumption – Based Explanation of Aggregate Stock Market Behavior", Journal of Political Economy, vol.107, pp.205-251.

rendimento legato a un tasso fisso e che fosse possibile prendere e dare a prestito senza limitazioni (a parte il vincolo terminale!).

Esaminiamo l'equilibrio competitivo in un contesto intertemporale incerto. Indichiamo[47] con $s_t \epsilon S = \{1,2.3 \ldots, n\}$ un evento che si verifica al tempo t fra gli n possibili in ogni periodo di tempo . L'insieme S non cambia con il tempo. Con s^t=$(s_0 , s_1 \ldots s_t,) \epsilon SxSx \ldots S = S^{t+1}$ indichiamo una storia di eventi, la cui probabilità è $\pi(s^t)$. mentre $\pi\{s_{t+1}|s^t\}$ rappresenta la probabilità condizionata di s_{t+1}. All'inizio della storia s_0, prima che l'incertezza sia risolta, ogni soggetto ha accesso a un sistema completo di mercati in cui il prezzo di ogni bene è indicizzato rispetto al tempo e allo stato di natura (beni contingenti, ogni bene anche se merceologicamente uguale è considerato economicamente un bene diverso se cambia il tempo o lo stato di natura in cui disponibile). Con $p_t(s^t)$ indichiamo il prezzo quotato al tempo 0 per un'unità di bene di consumo da consegnarsi al tempo t se e solo se la storia s^t si è realizzata.

"**Un Equilibrio di Arrow-Debreu è costituito da prezzi** $\{p_t^*(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ $\boldsymbol{con\ s^t \epsilon S^t}$**e allocazioni di beni** $\left\{c_t^{*i}(s^t)\right\}_{t=0}^{\infty}$ $\boldsymbol{, con\ s^t \epsilon S^t\ e\ i = 1, 2, \ldots l.\ ove\ l}$ **è** $\boldsymbol{il\ numero\ dei\ donsumatori\ esistenti.}$ **tale che:**

a) dato $\{p_t^*(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ $\boldsymbol{con\ s^t \epsilon S^t}$**per *i=1,2,…l,*** $\left\{c_t^{*i}(s^t)\right\}_{t=0}^{\infty}$ **risolve:**

$$\max_{\{c_t^{*i}(s^t)\}_{t=0}^{\infty}, con\ s^t \epsilon S^t} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{s^t \epsilon S^t} \beta^t\, \pi(s^t) U\left(c_t^i(s^t)\right)$$

s.t. $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{s^t \epsilon S^t} p_t^*(s^t)\, c_t^i(s^t) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{s^t \epsilon S^t} p_t^*(s^t)\, e_t^i(s^t)$ **con** $c_t^i(s^t) \geq 0$ **per tutti i t.**

b) i mercati sono in equilibrio:

$\sum_{i=1}^{l} c_t^{*i}(s^t)$=$\sum_{i=1}^{l} e_t^i(s^t)$ **per tutti i t, e per tutti** s^t

ove $e_t^i(s^t)$ **è la dotazione di beni del soggetto i-simo fissata al tempo 0 e disponibile al tempo t se si realizza la storia** s^t**."**

Il *framework* utilizzato è altamente irrealistico, tutti gli scambi avvengono al tempo zero e prima che l'incertezza sia risolta. In realtà gli scambi avvengono sequenzialmente su mercati a pronti in ciascun periodo di tempo e per ogni coppia

[47] Le opere indicate in nota contengono una trattazione completa di questo paragrafo.Noi abbiamo seguito Fernandez-Villaverde J. (2016) *Lecture Notes for Macroeconomics*, University of Pennsylvania.

evento-storia. Vengono altresì stipulati in ogni periodo t contratti finanziari, in letteratura *Arrow securities*, che danno diritto a ricevere (o pagare) al periodo t+1 un'unità di bene di consumo se si realizza un particolare stato di natura. Indichiamo con $Q_t(s^t, s_{t+1})$ e $a_{t+1}^i(s^t, s_{t+1})$, rispettivamente, il prezzo e le quantità di *Arrow securities* trattate dal soggetto i-simo[48]. Per evitare situazioni *à la Ponzi*, viene imposta la condizione tecnica che $a_{t+1}^i(s^t, s_{t+1}) \geq -A_{t+1}^i(s^{t+1})$ ove

$A_{t+1}^i(s^{t+1}) = \sum_{\tau=t+1}^{\infty} \sum_{s^\tau/s^{t+1}} \frac{p_\tau(s^\tau)}{p_{t+1}(s^{t+1})} e_\tau^i(s^\tau)$ è la "coda delle dotazioni individuali".

"**Un equilibrio in mercati sequenziali è costituito da prezzi** $\{Q_t^*(s^t, s_{t+1})\}_{t=0}^{\infty} s^t \in S^t, s_{t+1} \in S$ **e allocazioni** $\left\{\left(c_t^{i*}(s^t), \{a_{t+1}^{*i}(s^t, s_{t+1})\}_{s_{t+1} \in S}\right) i = 1, 2, \dots l\right\}_{i=0, s^t \in S}^{\infty}$**, tali che**

a) **Dato** $\{Q_t^*(s^t, s_{t+1})\}_{t=0}^{\infty} s^t \in S^t, s_{t+1} \in S$ **per tutti gli i, per ogni soggettoi=1,2,…l,** $\left\{\left(c_t^{i*}(s^t), \{a_{t+1}^{*i}(s^t, s_{t+1})\}_{s_{t+1} \in S}\right)\right\}_{i=0, s^t \in S}^{\infty}$ **risolve il seguente problema di max:**

$$\max_{\left\{\left(c_t^{i*}(s^t), \{a_{t+1}^{*i}(s^t, s_{t+1})\}_{s_{t+1} \in S}\right)\right\}_{i=0, s^t \in S}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t \in S} \beta^t \pi(s^t) U\left(c_t^i(s^t)\right)$$

$$s.t.\ c_t^i(s^t) + \sum_{\frac{s_{t+1}}{s^t}} Q_t^*(s^t, s_{t+1})\, a_{t+1}^i(s^t, s_{t+1}) \leq e_\tau^i(s^\tau) + a_t^i(s^t)$$

$$c_t^i(s^t) \geq 0 \text{ per tutti i t}, s^t \in S^t$$

$$a_{t+1}^i(s^t, s_{t+1}) \geq -A_{t+1}^i(s^{t+1}) \text{ per tutti i t}, s^t \in S^t) .$$

b) $\sum_{i=1}^{l} c_t^{i*}(s^t) = \sum_{i=1}^{l} e_t^i(s^t)$ **per tutti i t,** $s^t \in S^t$.

c) $\sum_{i=1}^{l} a_{t+1}^{*i}(s^t, s_{t+1}) = 0$ **per tutti i t,** $s^t \in S^t$**."**

---

[48] In letteratura si usano in modo intercambiale i termini *Arrow securities*, *contingent claims* e *one-period insurance contract*.

Si dimostra che vi è una equivalenza fra le situazioni di equilibrio di un modello con un insieme di mercati contingenti e un modeelo con un insieme di *Arrow Securities*[49]. E' ben noto, per i teoremi dell'economia del benessere, che un equilibrio competitivo è efficiente in senso paretiano mentre il viceversa si verifica sotto l'ipotesi di convessità e opportuna redistribuzione delle risorse. Meno noto, ma sempre più utilizzato, il metodo elaborato da Negishi[50] per calcolare gli equilibri competitivi senza utilizzare i prezzi (semplificazione importante, ad esempio, in presenza di differenziazione dei prodotti e di beni infiniti). Basta, infatti, che con un numero finito di soggetti il pianificatore sociale massimizzi la somma delle utilità individuali, ponderando ogni funzione con pesi non negativi e diversi da zero. Il metodo di Negishi fornisce un algoritmo per calcolare tutti gli ottimi paretiani ed individuare quelle allocazioni che sono equilibri competitivi[51].

"Un'allocazione $\left(\{c_t^i(s^t)\}_{t=0,s^t\in S^t}^{\infty}\right)$ **con i=1,….l è efficiente in senso paretiano se e soltanto se risolve per qualche** $(\alpha_i)_{i=1,2,\dots l} \in [0,1]$ **il seguente problema:**

$$\max_{\left(\{c_t^i(s^t)\}_{t=0,s^t\in S^t}^{\infty}\right)_{i=1,2,..l}} \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \sum_{s^t\in S^t} \beta^t \pi(s^t)\, U\left(c_t^i(s^t)\right)$$

$$\text{s.t} \sum_{i=1}^{l} c_t^{i*}(s^t) = \sum_{i=1}^{l} e_t^i(s^t) \text{ per tutti i t}, s^t \in S^t.$$
$$c_t^i(s^t) \geq 0 \text{per tutti i t}, s^t \in S^t$$

Ove α_i ***sono i pesi paretiani***".

Indichiamo con $\lambda_t(s^t)$ i moltiplicatori di lagrange relativi agli stati di natura corrispondenti, ignoriamo i vincoli di non negatività delle variabili e scriviamo le condizioni del primo ordine della seguente lagrangiana:

$$\max_{\left(\{c_t^i(s^t)\}_{t=0,s^t\in S^t}^{\infty}\right)_{i=1,2,..l}} \sum_{i=1}^{l} \sum_{s^t\in S^t} \left\{\sum_{i=1}^{l} \alpha_i\, \beta^t \pi(s^t) U\left(c_t^i(s^t)\right) + \lambda_t(s^t)\left(\sum_{i=1}^{l}\left[e_t^i(s^t) - c_t^i(s^t)\right]\right)\right\}.$$

Abbiamo:

---

[49] La dimostrazione più comprensibile è in Mas-Colell A.-Whinston M.D.-Green J. R. (1995) Microeconomic Theory, Oxford University Press, Proposition 19.D.1, pag.697.

[50] Negishi T. (1960)"Welfare Economics and the existence of an equilibrium

[51] Consiglio l'esposizione in Varian H. (1992) *Microeconomic Analysis*, W.W. Norton6 Company, third editione e Violante G. (2014) "Two elementary results on aggregation of technologies and preferences" *Lecture Notes*, pp.1-26

32) $\alpha_i \beta^t \pi(s^t) U'\left(c_t^i(s^t)\right) = \lambda_t(\mathrm{s}^\mathrm{t})$ per tutti gli $\mathrm{i}, \mathrm{t}, \mathrm{s}^\mathrm{t} \in \mathrm{S}^\mathrm{t}$ da cui discende, calcolando il rapporto rispetto a due soggetti distinti:

33) $\frac{U'\left(c_t^i(s^t)\right)}{U'\left(c_t^j(s^t)\right)} = \frac{\alpha_j}{\alpha_i}$ cioè il rapporto fra le utilità marginali di una qualunque coppia di soggetti è costante nel tempo e nei diversi stati di natura. Si ha quindi UNA PERFETTA ASSICURAZIONE. Inoltre, se fissiamo j=1, abbiamo

34) $c_t^i(s^t) = U'^{-1}\left(\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\right) U'\left(c_t^1(s^t)\right)\right)$. Sommando fra i diversi individui e tendo conto el vincolo delle risorse otteniamo:

35) $\sum_{i=1}^{l} \mathrm{e}_\mathrm{t}^\mathrm{i}(\mathrm{s}^\mathrm{t}) = \sum_{i=1}^{l} U'^{-1}\left(\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\right) U'\left(c_t^1(s^t)\right)\right)$ che un'equazione in una sola incognita $c_t^1(s^t)$. Ne discende che l'allocazione efficiente in senso paretiano $\left(\left\{\mathrm{c}_\mathrm{t}^\mathrm{i}(\mathrm{s}^\mathrm{t})\right\}_{\mathrm{t}=0,\mathrm{s}^\mathrm{t}\in\mathrm{S}^\mathrm{t}}^{\infty}\right)$ dipenda soltanto dalla dotazione aggregata. Il secondo teorema dell'economia del benessere permette di rispondere alla domanda se un'allocazione efficiente in senso paretiano possa essere decentralizzata come equilibrio competitivo. In un modello dinamico sono più difficili da caratterizzare rispetto alle allocazioni efficienti in senso paretiano, perchè come afferma Acemoglu "*The real power of tht Second Welfare Theorem in dynamic macromodels comes when it is combined with a normative representative household*"[52]

7- L'agente rappresentativo.

In un modello con agente rappresentativo le azioni scelte dai diversi soggetti possono essere sostituite, a livello aggregato, dall'azione di un singolo agente che massimizza la sua utilità attesa. In tal modo, non si deve modellare l'equilibrio del modello economico come il risultato complesso dell'interazione di soggetti eterogenei ma *as if* la massimizzazione di un singolo agente. Il teorema di Debreu-Mantel-Sonnenchein dimostra che, senza imporre condizioni aggiuntive[53], la funzione di eccesso di domanda a livello aggregato non possa essere generata dal comportamento massimizzante di un singolo soggetto. Occorre quindi restringere la distribuzione del reddito per potere aggregare le funzioni di domanda. Un risultato importante è rappresentato dal seguente teorema di Gorman:

[52] Acemoglu D. (2009) op.cit. pag. 167.
[53] Acemoglu D. (2009) op.cit. pag.150, le condizioni originarie sono continuità, omogeneità di grado zero e soddisfacimento della legge di Walras.

“**Consider an economy with a finite number $N < \infty$ of commodities and a set H of households. Suppose that the preferences of household $h \in H$ can be represented by an indirect utility function of the form**

$$v^h(p, y^h) = a^h(p) + b(p)y^h$$

Then these preferences can be aggregated and represented by those of a representative household, with indirect utility

$$v(p, y) = a(p) + b(p)y$$

Where $a(p) \equiv \int_{h \in H} a^h(p)dh$, and $y \equiv \int_{h \in H} y^h dh$ is aggregate income”[54]

Di fatto il teorema è anche condizione necessaria per l’aggregazione. In assenza di incertezza il teorema è meno restrittivo di quanto sembri, in quanto basta che ci sia una trasformazione monotonica della funzione indiretta di utilità che assume la forma richiesta. La quasi-linearità delle preferenze limita gli effetti di reddito e consente di aggregare le domande indivduali. Per ottenere questo risultato le curve di Engel devono essere lineari. Nello stesso contesto Rubinstein[55] ha esteso i risultati di Gorman a un’economia dinamica in cui le fonti finanziarie a disposizione sono la ricchezza e non il reddito. Rubinstein individua sei diversi gruppi di condizioni che danno luogo all’aggregazione delle domande. Tutte hanno in comune lo stesso parametro di curvatura delle funzioni di utilità dei soggetti così da garantire stesse pendenze e linearità nelle domande individuali di assets. Ma Rubinstein astrae da un elemento cruciale dell’economie dinamiche, il rischio idiosincratico che gli individui devono fronteggiare, per fluttuazioni nei redditi da lavoro,nei rendimenti degli asset , shocks relativi alle condizioni di salute o ai prezzi delle case ecc. Aspetti che sono invece esplicitamente considerati da Costantinides[56]Egli dimostra che, in un contesto di mercati completi, si possono sostituire i diversi consumatori con un soggetto rappresentativo il cui problema di ottimizzazione è risolto dal pianificatore sociale secondo la procedura *à la Negishi*, che abbiamo visto nel paragrafo precedente. Il teorema di aggregazione di Constantinides è più generale rispetto a quelli d Gorman e Rubinstein. Innanzitutto le risorse a disposizione dei soggetti possono cambiare nel tempo, non solo per dotazioni esogene, ma soprattutto per la produzione; poi le

[54] Acemoglu D. (2009) op.cit. pag. 151 , Ogaki M: (2003)” Aggregation under complete markets” *Review odf Economic Dynamics*, vol.6, pp.977-986. Guvenen F(2011) “Macroeconomics with Heterogeneity: A practical Guide”*Economic Quarterly*, vol.97, pp.255-326.
[55] Rubinstein M. (1974)”An aggregation theorem for securities markets” *Journal of Financial Economics* 1, pp.225-244.
[56] Constantinides G.M.(1982) “Intertemporal asset pricing with heterogeneous consumer and without demand aggregation” *Journal of Business*, 55, pp.253-267. Si veda anche Huang. Chi-Fu-Litzenberger R.H. (1988) *Foundations for Financial Economics*, Noth Holland Cap.5.

uniche ipotesi formulate sulle preferenze è che siano rappresentate da una funzione di utilità crescente e concava, quindi non sono presenti restrizioni in termini di omegeneità (Rubinstein), o di omoteticità e/o quasi-linearità (Gorman). A differenza di Gorman, un'ipotesi importante è la completezza dei mercati. Il consumatore rappresentativo, infatti, è definito solo in corrispondenza dei prezzi di equilibrio, che sono influenzati dai pesi stabiliti dal pianificatore, e quindi dalla distribuzione delle risorse. Il teorema di Constantinides è stato esteso all'aggregazione della domanda negli infraperiodi del problema intertemporale da Ogaki [57] Interessante è il confronto che presenta rispetto ad altri lavori, in particolare rispetto a: 1) Hildenbrand[58] che restringe, anche temporalmente, a sottoinsiemi dei parametri, le possibili distribuzioni dei redditi compatibili con l'aggregazione, 2) Freixas e Mas-Colell[59] che impongono una condizione di curvatura uniforme nelle funzioni di utilità.

Nelle *lecture notes* di Cochrane[60] si trova un esempio molto semplice di aggregazione con mercati completi. Il pianificatore massimizza la seguente funzione di benessere sociale:

$$V(c^a, c^a(s);\ \{\Delta\}) = v(c^a) + \beta^a \sum_s \pi(s) v\big(c^a(s)\big)$$

$$= max_{\{c^j, c^j(s)\}} \sum_j \Lambda_j \left[U\big(c^j\big) + \beta_j \sum_s \pi(s)\ U\big[c^j(s)\big] \right]$$

$$.s.t. \textstyle\sum_j c_j\ (s) = c^a(s); \qquad \sum_j c_j = c^a.$$

Ove V(.), c^a e $c^a(s)$ rappresentano, rispettivamente, la funzione di utilità, il consumo corrente e il consumo in ogni stato di natura s dell'agente rappresentativo, e U(.) , c^j e $c^j(s)$le corrispondenti variabili del consumatore j-simo. Λ_j sono i pesi assegnati dal pianificatore sociale alle funzioni individuali di utilità. Λ e $\Lambda(s)\pi(s)$ rappresentano, rispettivamente, i moltiplicatori per i vincoli delle risorse: il consumo dell'agente rappresentativo deve essere uguale al consumo degli individui nel periodo corrente e in ogni stato di natura.

Le condizioni del primo ordine sono le seguenti:

[57] Ogaki M. (2003) "Aggregation under complete markets, *Review of Economic Dynamics*, vol.6, pp. 977-986.
[58] Hildenbrand W. (1983) "On the "law of Demand", *Econometrica*, vol.51, pp.997-1020.
[59] Freixas X.-Mas-Colell A. (1987) "Engel curves leading to the weak axiom in the aggregate", *Econometrica*, vol.55, pp.515-531.
[60] Cochrane J. (2013)" Notes on Aggregation", Faculty.chigagobooth/john.cochrane/teaching/35901_Asset-Pricing/.

$$\lambda_j U'(c_j) = \Lambda$$

$$\lambda_j \beta_j \pi(s) U'\left(c^j(s)\right) = \Lambda(s)\pi(s)$$

$$m(s) = \frac{\Lambda(s)}{\Lambda} = \frac{\beta_j U'\left(c^j(s)\right)}{U'(c_j)}$$

Se articoliamo nel tempo, $m_{t+1}^{i} = m_{t+1}^{j}$abbiamo il risultato già visto delle perfetta copertura del rischio. Se scriviamo le condizioni del primo ordine per V(.) abbiamo:

$$v'(c^a) = \Lambda = \lambda_j U'(c_j)$$

$$\beta^a \pi(s) v'\left(c^a(s)\right) = \lambda_j \beta_j \pi(s) U'\left(c^j(s)\right) = \Lambda(s)\pi(s)$$

$$m(s) = \frac{\beta^a v'\left(c^a(s)\right)}{v'(c^a)}$$

Indubbiamente il teorema di Debreu-Mantel-Sonnenchein rappresenta un ostacolo formidabile nel cammino dell'agente rappresentativo. Kirman[61] ritiene di più che sia un ostacolo insormontabile, ma la critica appare eccessiva nei toni e nelle conclusioni, dal momento che vi sono, infatti, teoremi che garantiscono l'esistenza dell'agente rappresentativo ma certamente valgono sotto ipotesi restritte o la loro validità è limitata alle condizioni di equilibrio. E' possibile, rimuovendo l'ipotesi che gli individui vivano per sempre, come nel *Perpetual Youth Model*[62], costuire un soggetto rappresentativo. Invece, l'inconveniente che l'equazione di Eulero risulta essere diversa da quella di un qualunque altro individuo. L'aggregazione è importante per comprendere e modellare i rapporti fra i disparati comportamenti individuali (micro) e i dati e le statitiche disponibili a livello aggregato. Gli individui si differenziano per gusti, redditi, atteggiamenti verso il rischio, per caratteristiche innate e altre indotte dai processi economico-sociali; per cui sintetizzarli distillando

[61] Kirman A. P. (1992) "Whom and What Does the Representative Individual Represent?", *Journal of Economic Perspectives*, vol.6, pp.117-136. Si veda anche Hartley J:E:-Hoover K.-Salyer K:D: (1998) *Real business cycles. A reader*, Routledge, cap.1

[62] Blanchard O. J.-Fischer S. (1989) *Lectures on Macroeconomics*, the Mitt Press.pp.115 e segg. Si veda Storesletten K. (2017)" Lecture 1: Foundations of neoclassical Growth (Acemoglu2009, chapter 5) Adapted from Zilibotti's notes", http://www.uio.no/studier/emner/sv/oekonomi/ECON5300/h17/lecture-notes/lecture1_slides_ch5.pdf.

gli elementi strutturali è fondamentale *"Understanding economic aggregates is essential for understanding economic policy. There is just too much individual detail to conceive of tuning policies to the idiosyncrasies of many individuals"*[63]

I livelli di aggregazione (merci, individui ecc.) sono molteplici e complicati per cui un filone sempre più rilevante di letteratura si è indirizzata ad analizzare i rapporti fra eterogeneità dei soggetti e dinamica distributiva. Se da un lato il tema della diversità dei soggetti non è nuovo, basti pensare al modello a generazione sovrapposte, dall'altro l'enfasi è sull'introduzione di incompletezza dei mercati nei modelli di equilibrio generale così da tenere conto di effetti che differenti categorie di rischio, di vincoli di liquidità ecc. implicano nell'analisi congiunta di temi aggregati e distributivi:

"*This expansion is crucial for policy analysis, for two reasons. First volatily at the level of individual workers and firms is orders of magnitude larger than aggregate volatility. Second, the evaluation of large-scale government programs (e.g. social insurance, tuition subsidies) requires models that take into account both general equilibrium effects and the heterogeneous impact of policies across the population*"[64].

8- Il passaggio alla produzione e all'incertezza.

Uno dei risultati più rilevanti conseguiti dalla teoria del ciclo reale (*Real Business Cycle*) è avere mostrato che sono possibili fluttuazioni economiche in un sistema di mercati perfettamente concorrenziali. Rigidità di prezzi, problemi di coordinazione, *animal spirits*, politiche monetarie e fiscali ecc., non sono cause necessarie dei cicli. Le più importanti regolarità empiriche possono essere, invece, il prodotto delle reazioni di soggetti massimizzanti che hanno aspettative razionali agli *shocks* reali tecnologici e di produttività. Per passare quindi ai modelli *Real Business Cycles* è necessario introdurre nel modello neoclassico il fenomeno della produzione. Nella versione deterministica l'aggiunta di tale fenomeno non comporta cambiamenti significativi. L'agente rappresentativo o il pianificatore sociale devono risolvere il seguente problema di massimizzazione:

$$max_{\{k_t,c_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t\, U(c_t)$$

[63] Stoker T.(2008) Aggregation (econometrics)" in Durlauf S.-Blume L.E. (ed) The New Palgrave Dictionary of Economics, Plagrave. MacMillan.

[64] Heathcote J.-Storesletten K. –Violante G. (2009) "Quantitative Macroeconomics with Heterogeneous Households" Annual Review of Economics, vol.1, pp.319-354. Questi temi sono analizzati a fondo anche in Attanasio O. P.- Weber G. (2010) op.cit e Guvenen F. (2011) op.cit.

$$s.t. \quad c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t \leq F(k_t, n_t)\ \forall t.$$

Sotto l' ipotesi semplificatrice che l'offerta di lavoro sia inelastica e fissata a livello unitario, cioè $n_t = 1,$ avendo definito, per convenienza, $f(k) = F(k,1) + (1-\delta)k$,

il problema si può esprimere nella versione ricorsiva:

36) $V(k_t) = max_{0 \leq k_{+1} \leq f(k_t)}\{U[f(k_t) - k_{+1}] + \beta V(k_{t+1})\}$

La reintroduzione del problema della scelta fra lavoro e tempo libero rende l'analisi economica più significativa, complica formalmente l'analisi ma non ne modifica la natura concettuale.

Il modello deterministico di crescita ha tante versioni stocastiche equivalenti, quante sono le differenti ipotesi sulla natura dell'incertezza, può infatti essere additiva o moltiplicativa riguardare o meno le preferenze dei soggetti ecc. Seguiamo Acemoglu[65] e definiamo una variabile stocastica $z(t) \in Z = [z_1, z_2, \dots z_N]\ con\ z_1 < z_2 < \cdots < z_N$, Z è finito e, quindi, compatto, il che semplifica l'analisi. Si suppone che la variabile z(t) segua un processo stocastico di Markov del primo ordine, detto anche catena di Markov. Formalmente può essere espresso come:

37) $Pr\{\mathrm{z(t)} = z_j | z(0), z(1), \dots, z(t-1)\} \equiv Pr\{\mathrm{z(t)} = z_j | z(t-1)\}$, cioè la probabilità al tempo t di raggiungere un certo stato dipende esclusivamente dal periodo immediatamente precedente, t-1.La storia antecedente non esercita alcuna influenza se non nello stato raggiunto.

Se il processo avesse una distribuzione di probabilità continua, o una combinazione di distribuzione continua e discreta, avremmo in quel caso un processo generale markoviano. Di solito si rappresenta una catena di Markov attraverso le probabilità di transizione, cioè di passaggio da uno stato a un altro, definite come:

38) $Pr\{\mathrm{z(t)} = z_j | z(t-1) = z_i\} \equiv q_{ji}\ per\ un\ qualunque\ \ i, j = 1,2, \dots . N\ con\ q_{ji} \geq 0\ e\ \sum_{j=1}^{N} q_{ji} = 1\ \forall i\ = 1, \dots . N.$

q_{ji} è, appunto, la probabilità di transizione dallo stato $z_i\ allo\ stato\ z_j$. Ora le realizzazioni di c(t) e k(t+1) sono funzioni dell'intera storia degli shocks fino al tempo t; per cui sono piani di comportamento condizionali.Se definiamo $Z^t = Z\mathrm{x}Z\mathrm{x} \dots \mathrm{x}Z$, cioè il prodotto cartesiano di se stesso t-volte e con $z^t \in Z^t$un suo generico elemento, allora possiamo scrivere:

---

[65] Acemoglu D. (2009) op.cit. cap.16. Per versione diverse si vedano, ad es., Lucas. R.E- Stokey. N. (1989) op.cit., pp.16-22 e Altug. S.(2010) *Business Cycles. Fact, Fallacy and Fantasy*, World Scientific, Ne Jersey. Pag.33 e segg.

39) c(t)= $c[z^t]$ e

40) k(t+1)=f(k(t), z(t))+(1- δ)k(t)- $c[z^t] \equiv k[z^t]$.

Ricordando che z(0) e k(0) sono dati, il vincolo sulle risorse è in ultima analisi:

41) $k[z^t] = f\left(k[z^{t-1}], z(t)\right) + (1-\delta)k[z^{t-1}] - c[z^t]$.

Il modello stocastico di ottimizzazione assume la seguente forma:

42)

$$max_{\{c[z^t],k[z^t]\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t\, U(c[z^t])$$

$$s.t. c[z^t] + k[z^t] = f\left(k[z^{t-1}], z(t)\right) + (1-\delta)k[z^{t-1}], c[z^t] \geq 0, k[z^t] \geq 0, \forall z^t \in\ Z^t e\ \forall t = 0,1,2 \ldots .\, con\ k[z^{-1}] = k(0) e\ z(0)\ .$$

Nella versione ricorsiva diventa:

43) $V(k,z) = sup_{0\leq y\leq f(k,z)+(1-\delta)k}[U(f(k,z) + (1-\delta)k) - y] + \beta E(V(y,z')|z)$

Dove $E(.\,|z)$ rappresenta l'aspettativa condizionata allo shock corrente z soltanto, perché il processo incorpora la proprietà di Markov. Si noti come l'aspettativa nel sistema 42) si rivolga all'intero periodo di programmazione, mentre nell'equazione 43) riguarda soloil periodo immediatamente futuro. Una struttura ricorsiva è importante per utilizzare i relativi strumenti nell'analisi dinamica dei fenomeni economici e nelle serie storiche che li rappresentano; per questo è necessario assumere che gli shocks seguano un processo di Markov. Se invece la z assume valori in un intervallo, cioè se $Z \equiv [a,b]$, o in insiemi più generali è conveniente (e spesso indispensabile) utilizzare gli strumenti e i concetti della teoria della misura[66]. In questo caso la versione ricorsiva diventa:

44) $V(k,z) = sup_{y\in G(k,z)}[U(k,y,z) + \beta \int V(y,z')Q(z,dz')]\forall k\ e\ \forall z \in Z$

Dove G(k,z) esprime il vincolo di risorse relativo alla variabile di stato del prossimo periodo (si veda appendice) e Q(z, .) è la funzione di transizione che esprime la distribuzione dello shock stocastico del prossimo periodo, dato il segnale z del periodo corrente. Se passiamo a spazi misurabili differenti la generalizzazione della

[66] Oltre ai libri considerati e aalla letteratura ivi citata, mi permetto di segnalare Ash. R.(1972) *Real Analysis and Probability*, Academic Press.

funzione di transizione è costituita dallo *stochastic kernel*[67]: Si tratta di temi e strumenti molto interessanti e complessi, che saranno oggetto di futuro lavoro.

APPENDICE[68]

Il modello canonico di ottimizzazione stazionaria in tempo discreto su orizzonte temporale infinito e in condizione di certezza è il seguente:

1) $V^*\big(x(0)\big) = sup_{\{x(t+1)_{t=0}^{\infty}\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t\, U\big(x(t), x(t+1)\big)$

s.t $\quad x(t+1) \in G\big(x(t)\big) \forall\ t \geq 0 con\ x(0) dato$

dove $\beta \in [0,1[$ è il fattore di sconto, G: $X \rightarrow X con$ X ⊂ R^K specifica la corrispondenza dei vincoli e U:$XxX \rightarrow X$ è la funzione di *playoff* istantanea. La stazionarietà deriva dal fatto che G e U non dipendono direttamente dal tempo; x(t) rappresenta le variabili di stato mentre x(t+1) esprime le variabili controllo (in problemi più generali le due variabili appartengono a spazi differenti).$\{x^*(t+1)_{t=0}^{\infty}\} \in X^{\infty}$, rappresenta la successione ottimale è ed un elemento del prodotto cartesiano infinitamente numerabile X^{∞}che ,spesso, è un sottoinsieme di l^{∞}, lo spazio delle successioni infinite limitate nella norma sup,$\|.\|_{\infty}$. Abbiamo utilizzato la notazione sup e non max in quanto non è garantito, in generale, che il massimo valore sia effettivamente raggiunto. Infine definiamo i piani possibili, cioè le successioni ammissibili a partire da un valore iniziale x(t), come:

$\Phi\big(x(t)\big) = \big\{\{x(s)\}_{s=t}^{\infty} : x(t+1) \in G\big(x(s)\big), per\ s = t, t+1, \dots.\big\}$.Indicheremo un elemento di $\Phi\big(\mathrm{x}(0)\big)$ con $\mathbf{x} = (x(0), x(1), x(2) \dots.)$.

L'idea fondamentale della programmazione dinamica è tradurre il problema di ottimizzazione, che ha come soluzione una successione infinita di variabili. nella seguente equazione funzionale:

2) $V(x) = sup_{y \in G(x)}\{U(x, y) + \beta V(y)\}$

dove V: $X \rightarrow R$ è una funzione a valori reali. Sotto la seguente ipotesi:

---

[67] Si vedano in particolare Lucas. R.E- Stokey. N. (1989) op.cit., e Miao J.(2014) op.cit. p.75.

[68] Facciamo riferimento ad Acemoglu D.(2009) op.cit cap.6 ma consigliamo le dispense di Villanacci sui topics matematici che interessano gli economisti.

A) G(x) è non vuota$\forall x \in X\ e \forall x(0) \in X\ e\ \mathbf{x} \in$
$\Phi\big(\mathrm{x}(0)\big)$è vero che $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty} \sum_{t=0}^{n} \beta^t\, U\big(x(t), x(t+1)\big)\ esiste\ ed$ è $finito.$

si dimostrano i seguenti teoremi:

Teorema 1-(Equivalenza di valori): Per ogni x$\in X$, una qualunque soluzione $V^*(x)$ del Problema 1è anche soluzione del Problema 2. Mentre ogni soluzione V(x) del Problema 2 è anche soluzione del Problema1 e vale $V^*(x) = V(x)$.

Teorema 2-(**Principio di ottimalità**): Sia $x^* \in \Phi\big(\mathrm{x}(0)\big)$ una successione possibile che realizza $V^*\big(x(0)\big)$ nel Problema1, allora + soddisfatta la seguente equazione:

(*)$V^*\big(x^*(t)\big) = U(x^*(t), x^*(t+1)\ ) + \beta V^*\big(x^*(t+1)\big)\ \forall t \geq 0\ con\ x^*(0) = x(0)$.

Ora per un piano $\mathbf{x} = (x(0), x(1), x(2) \ldots .)$, possibile a partire dalla dotazione iniziale $x(0)$, cioè tale che $\mathbf{x} \in \Phi\big(\mathrm{x}(0)\big)$, definiamo con **U**(**x**)=$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t\, U\big(x(t), x(t+1)\big)$ il suo valore che in base all'ipotesi A è finito, allora vale il seguente lemma:

Lemma. Sotto l'ipotesi A, $\forall x(0) \in X\ e\ \forall \boldsymbol{x} \in\ \Phi\big(\mathrm{x}(0)\big)$ è vero che:

U(**x**)=U(x(0), x(1))+ $\beta\mathbf{U}(\mathbf{x}')$ ove $\mathbf{x}' = (x(1), x(2), x(3), \ldots ..)$

Dimostrazione. Per l'ipotesi A, **U**(**x**) esiste ed è finito, possiamo scrivere

U(**x**)=$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t\, U\big(x(t), x(t+1)\big) = U(x(0), x(1)\ ) + \beta \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s\, U\big(x(s+1), x(s+2)\big) = U(x(0), x(1)\ ) + \beta\mathbf{U}(\mathbf{x}')$.

Nel Problema 1, per l'ipotesi A e per le proprietà del sup, $V^*\big(x(0)\big) = sup_{\mathrm{x}\in\Phi(\mathrm{x}(0))}$U(x) è finito e risulta $\boldsymbol{\alpha}$) $V^*\big(x(0)\big) \geq$ U(x) e; $\boldsymbol{\beta}$) $\forall \epsilon > 0 \exists \mathbf{x}' \in \Phi\big(\mathrm{x}(0)\big)$ tale che $V^*\big(x(0)\big) \leq \mathbf{U}(\mathbf{x}') + \varepsilon$.

Lo stesso vale nel Problema 2, cioè $\boldsymbol{\gamma}$) $\forall y \in G\big(x(0)\big), V\big(x(0)\big) \geq U(x(0), y) + \beta V(y) e\ \forall \varepsilon > 0$; $\boldsymbol{\delta}$)$\exists y' \in G\big(x(0)\big)\ tale\ che\ V\big(x(0)\big) \leq U(x(0), y') + \beta V(y')$.

Dimostrazione del **Teorema1**. Per un qualunque $x(0)$ $\in$X e $x(1) \in G\big(x(0)\big)$, per la proprietà $\boldsymbol{\beta}$), esiste un $\mathbf{x}'_\varepsilon \in \Phi\big(\mathrm{x}(0)\big)$ tale che $\mathbf{U}(\mathbf{x}'_\varepsilon) \geq V^*\big(x(1)\big) - \varepsilon$.

Inoltre per **α**)**,** è vero che, per un qualunque $\mathbf{x} = (\mathrm{x}(0), \mathrm{x}(1), \dots) \in \Phi(\mathrm{x}(0))$ e, quindi, in particolare, per $\mathbf{x}_\varepsilon = (x(0),\ \mathbf{x}'_\varepsilon) \in \Phi(\mathrm{x}(0))$ abbiamo $\mathbf{U}(\ \mathbf{x}'_\varepsilon) \leq V^*(x(0))$. Dal lemma discende:

$$V^*(x(0)) \geq U(x(0), x(1)) + \beta\mathbf{U}(\ \mathbf{x}'_\varepsilon)\ e$$

$$V^*(x(0)) \geq U(x(0), x(1)) + \beta V^*(x(1)) - \beta\varepsilon$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, avremo che:

$$V^*(x(0)) \geq U(x(0), x(1)) + \beta V^*(x(1))$$

per cui $V^*(.)$ soddisfa la proprietà $\boldsymbol{\gamma}$)**.** Ora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\mathbf{x}'_\varepsilon = (x(0), x'_\varepsilon\ (1), x'_\varepsilon\ (2), \dots) \in \Phi(\mathrm{x}(0))$ tale che:

$$\mathbf{U}(\ \mathbf{x}'_\varepsilon) \geq V^*(x(0)) - \varepsilon$$

Poiché $\mathbf{x}''_\varepsilon = (x'_\varepsilon\ (1), x'_\varepsilon\ (2), \dots) \in\ \Phi(x'_\varepsilon\ (1))$ e $V^*(x'_\varepsilon\ (1))$ è il sup a partire da $x'_\varepsilon\ (1)$, il Lemma implica:

$U(x(0), x'_\varepsilon\ (1)) + \beta\mathbf{U}(\ \mathbf{x}''_\varepsilon) \geq V^*(x(0)) - \varepsilon$ e

$U(x(0), x'_\varepsilon\ (1)) + \beta \mathrm{V}^*(\ \mathbf{x}''_\varepsilon) \geq V^*(x(0)) - \varepsilon$

Essendo soddisfatte le proprietà **γ**) e **δ**), risulta che ogni soluzione del **teorema 1** è anche soluzione del **teorema 2**.

Dimostriamo il viceversa. In base alla proprietà $\boldsymbol{\gamma}$)**,** abbiamo, per un qualunque $\mathrm{x}(1) \in \mathrm{G}(\mathrm{x}(0))$,

$$V(x(0)) \geq U(x(0), x(1)) + \beta V(x(1))$$

Operando ricorsivamente abbiamo:

$$V(x(0)) \geq \sum_{t=0}^{n} U(x(t), x(t+1)) + \beta^{n+1}\, V(x(n+1))$$

$\lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{n} \beta^t U(x(t), x(t+1)) = \mathbf{U}(\mathbf{x})$ e $\lim_{n\to\infty} V(x(n+1)) = \lim_{n\to\infty} \left[\beta^{n+1} \lim_{m\to} \sum_{t=n}^{m} \beta^t U(x(t), x(t+1))\right]$=0 in base all'ipotesi A. Perciò:

$V(x(0)) \geq \mathbf{U}(\mathbf{x})\ \forall \mathbf{x} \in \Phi(x(0))$, in altre parole V(.) soddisfa la proprietà $\boldsymbol{\alpha}$). Con $\varepsilon \geq 0\ anche \varepsilon' = \varepsilon(1-\beta) > 0$ ed esiste $x_\varepsilon(1) \in G(x(0))$ tale che:

$$V\big(x(0)\big) \le U\big(x(0), x_\varepsilon(1)\big) + \beta V\big(x_\varepsilon(1)\big) + \varepsilon'$$

Sia $x_\varepsilon(t) \in G\big(x(t-1)\big)$ con $x_\varepsilon(0) = 0$ e si definisca $\mathbf{x}_\varepsilon = (x(0), x_\varepsilon(1), x_\varepsilon(2) \dots)$, attraverso sostituzioni ricorsive abbiamo:

$$V\big(x(0)\big) \le \sum_{t=0}^{n} U\big(x_\varepsilon(t), x_\varepsilon(t+1)\big) + \beta^{n+1}\, V(x(n+1) + \varepsilon' + \beta\varepsilon' + \dots + \beta^n \varepsilon')$$

$$V\big(x(0)\big) \le \mathbf{U}(\mathbf{x}_\varepsilon) + \varepsilon$$

Ora tale risultato discenda da $\varepsilon' \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t = \varepsilon' \frac{1}{1-\beta} = \varepsilon(1-\beta)\frac{1}{1-\beta} = \varepsilon$ e da $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{n} U\big(x_\varepsilon(t), x_\varepsilon(t+1)\big) = \mathbf{U}(\mathbf{x}_\varepsilon)$.quindi V(.) soddisfa la proprietà $\boldsymbol{\gamma}$) e quindi il teorema è dimostrato.

Dimostrazione del **teorema2**. Sia $\mathbf{x}^* = (x(0), x^*(1), x^*(2), \dots)$ una soluzione al Problema1 e quindi tale che ottenga il sup $V^*\big(x(0)\big)$ a partire da $x(0)$. Sia $\mathbf{x}_t^* = (x^*(t), x^*(t+1), \dots)$, vogliamo mostrare che $\mathbf{x}_t^*$ realizza il massimo a partire da $x^*(t)$ cioè $\mathbf{U}(\mathbf{x}_t^*) = V^*\big(x^*(t)\big)$.

La prova è per induzione. E' vero per t=0 , supponendo che sia vero per t dimostriamo che risulta vero per t+1. Ora:

$$(*) V^*\big(x^*(t)\big) = \mathbf{U}(\mathbf{x}_t^*) = U(x^*(t), x^*(t+1)) + \beta \mathbf{U}(\mathbf{x}_{t+1}^*)$$

Sia $\mathbf{x}_{\mathrm{t+1}} = (x^*(t+1), x^*(t+2), \dots) \in \Phi\big(x^*(t+1)\big)$ un qualunque possibile piano che parte da $x^*(t+1)$. Per definizione $\mathbf{x}_{\mathrm{t}} = (x^*(t), \mathbf{x}_{\mathrm{t+1}}) \in \Phi\big(x^*(t)\big)$,poiché $V^*\big(x^*(t)\big)$ è il sup a partire da $x^*(t)$, avremo:

$$(**) V^*\big(x^*(t)\big) \ge \mathbf{U}(\mathbf{x}_{\mathrm{t}}) = U(x^*(t), x^*(t+1)) + \beta \mathbf{U}(\mathbf{x}_{t+1})$$

Combinando (*) e (**) abbiamo $\mathbf{U}(\mathbf{x}_{t+1}^*) \ge \mathbf{U}(\mathbf{x}_{t+1}) \forall \mathbf{x}_{\mathrm{t+1}} \in \Phi\big(x^*(t+1)\big)$ il che completa l'induzione.

$(***) V^*\big(x^*(t)\big) = \mathbf{U}(\mathbf{x}_t^*) = U(x^*(t), x^*(t+1)) + \beta \mathbf{U}(\mathbf{x}_{t+1}^*) = U(x^*(t), x^*(t+1)) + \beta V^*(\mathbf{x}_{t+1}^*)$. La prima parte del **teorema 2** è così dimostrata.

Supponiamo che $\mathbf{x}^* \in \Phi\big(\mathrm{x}(0)\big)$ sostituendo ricorsivamente per $\mathbf{x}^*$,abbiamo:

$V^*\big(x(0)\big) = \sum_{t=0}^{n} \beta^t\, U(x^*(t), x^*(t+1)) + \beta^{n+1} V^*\big(x^*(n+1)\big),$

dal momento che $V^*(.)$ è limitata, infine, discende che

$\mathbf{U}(\mathbf{x}^*) = \lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{n} \beta^t \, U(x^*(t), x^*(t+1)\,) = V^*\big(x(0)\big)$ per cui $\mathbf{x}^*$ ottiene il valore ottimale nel Problema 1 dimostrando così il teorema.

Aggiungendo altre ipotesi, si dimostra, nella letteratura indicata, che esistono le soluzioni ottimali e che la funzione valore è concava, monotonica e differenziabile.