

Flusso Massimo su una rete

Versione del 29 novembre 2010

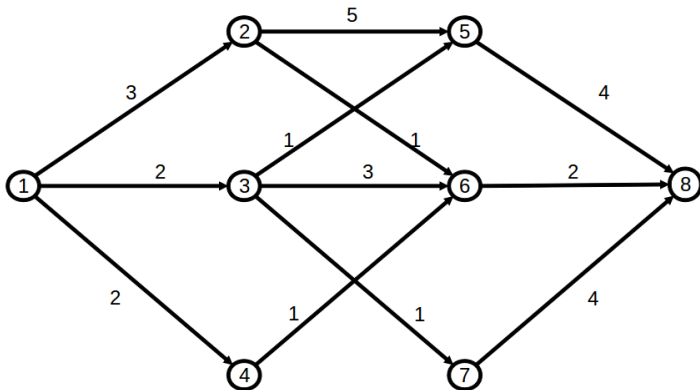
Avtor Neizvestnyi

Università di Firenze

Lezione del 3 Novembre 2010

La rete

Consideriamo rete rappresentata dal seguente grafo orientato con pesi



Si tratta quindi di un grafo $G := (V, A)$ orientato con pesi, dove

La rete

$$V := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$A := \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 5), \\ (3, 6), (3, 7), (4, 6), (5, 8), (6, 8), (7, 8)\}$$

$$c_{1,2} = 3, c_{1,3} = 2, c_{1,4} = 2, c_{2,5} = 5, c_{2,6} = 1, c_{3,5} = 1$$

$$c_{3,6} = 3, c_{3,7} = 1, c_{4,6} = 1, c_{5,8} = 4, c_{6,8} = 2, c_{7,8} = 4$$

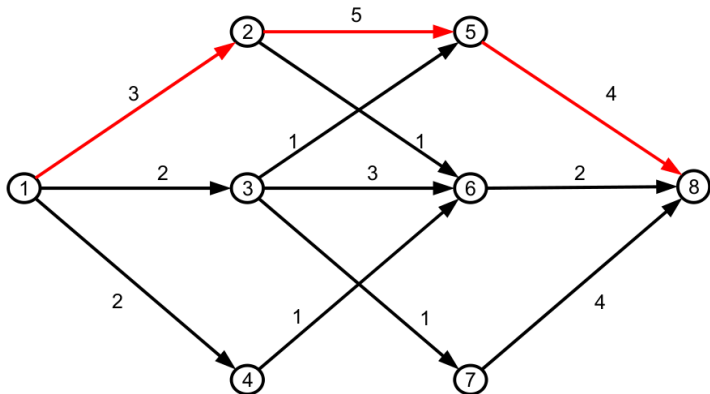
Poiché siamo interessati alla determinazione del massimo flusso sulla rete possiamo aggiungere anche tutti gli altri archi mancanti come ad esempio $(2, 3)$, $(2, 4)$ assegnandogli capacità zero $c_{2,3} = 0$, $c_{2,4} = 0$ senza cambiare la sostanza del problema

Un cammino diretto aumentante

Cerchiamo il flusso massimo sulla rete cercando un cammino aumentante sulla rete.

Consideriamo il cammino diretto aumentante

$$\text{MaxFlow} = 0, V_1 \xrightarrow{3} V_2 \xrightarrow{5} V_5 \xrightarrow{4} V_8, \text{ Flow} = +3$$



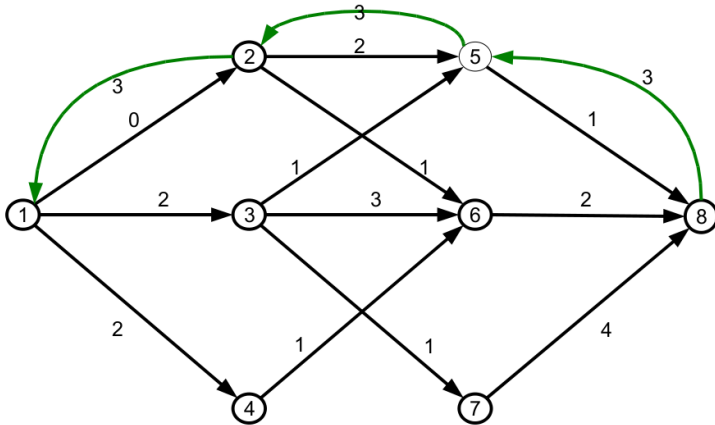
Costruzione di una nuova rete

Procediamo in maniera leggermente diversa dal solito con una rappresentazione analoga ma forse più significativa. Ricordiamo che i due dati importanti sono la capacità residua dell'arco e il flusso su quell'arco. Sia $(i, j) \in E$ e sia f l'incremento del flusso

- Aggiorniamo la capacità dell'arco a scrivendo la capacità residua $c(i, j) = c(i, j) - f \geq 0$
- Costruiamo (se non esiste già) un arco opposto con $c(j, i) = c(j, i) + f$

La nuova rete

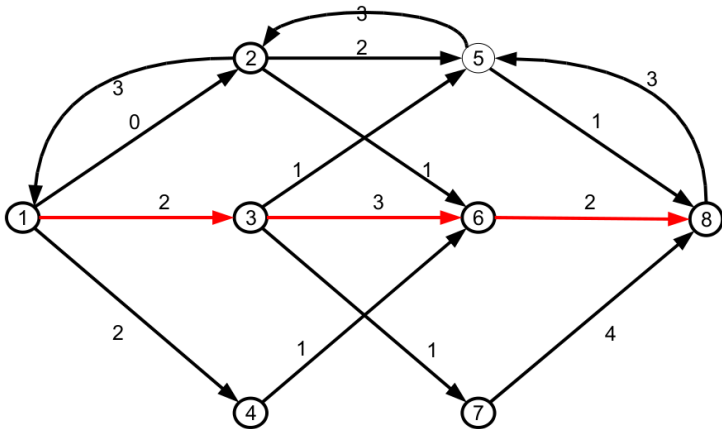
la nuova rete costruita in questo modo è



Un cammino diretto aumentante

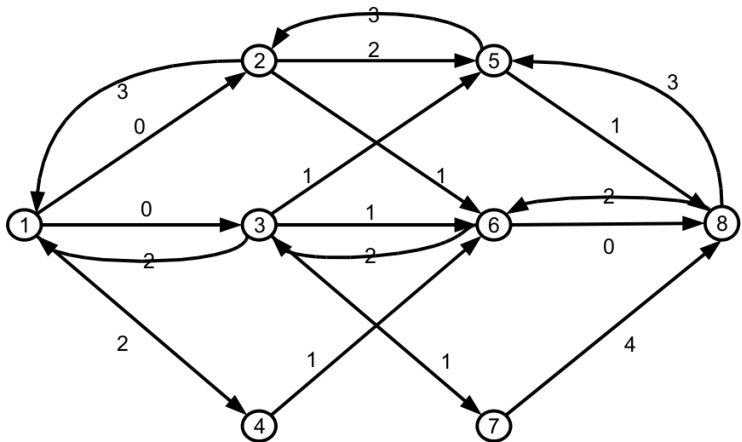
Consideriamo il cammino diretto aumentante

$$\text{MaxFlow} = 3, \quad V_1 \xrightarrow{2} V_3 \xrightarrow{3} V_6 \xrightarrow{2} V_8, \quad \text{Flow} = +2$$



La nuova rete

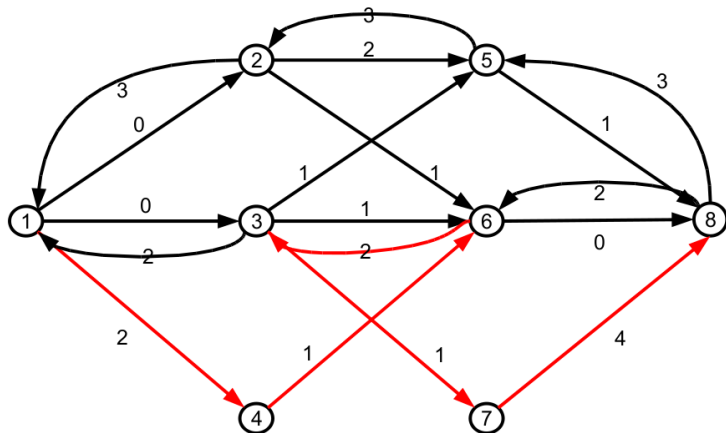
Aggiorniamo le capacità



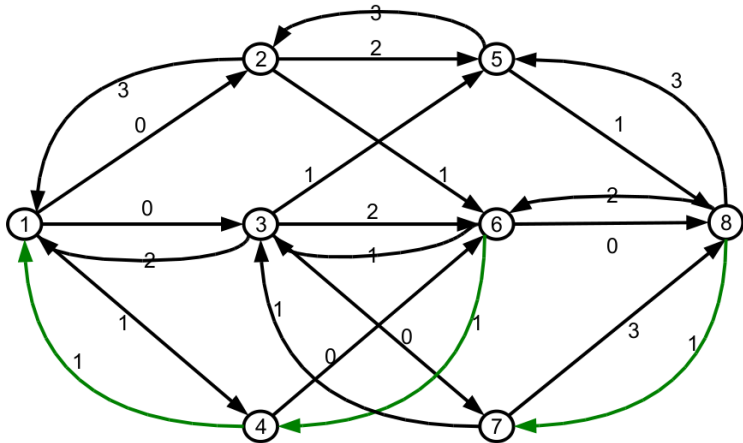
Un cammino diretto aumentante

Consideriamo il cammino diretto aumentante

$\text{MaxFlow} = 5, V_1 \xrightarrow{2} V_4 \xrightarrow{1} V_6 \xrightarrow{2} V_3 \xrightarrow{1} V_7 \xrightarrow{4} V_8, \text{ Flow} = +1$

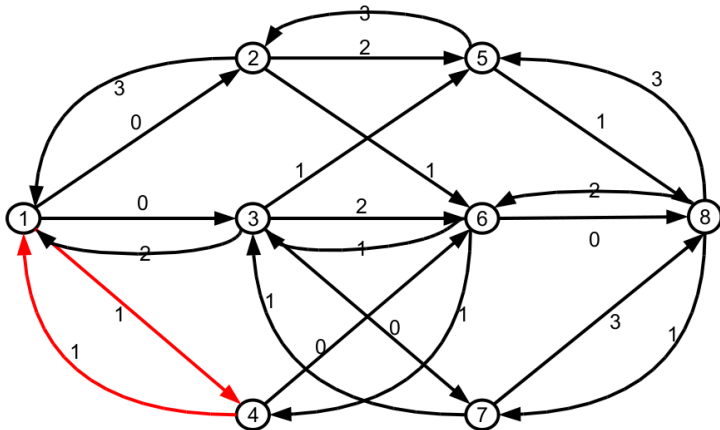


La nuova rete



Cammini diretti uscenti dalla sorgente

L'unico cammino diretto aumentante non arriva al termine e quindi la soluzione trovata è ottima con Flusso = 6



La matrice di adiacenza

Costruiamo la matrice di adiacenza del nostro grafo

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove i coefficienti sono definiti come

$$a_{ij} := \begin{cases} c_{ij} & \text{se } (i, j) \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ricerca di un cammino aumentante

Iniziamo la ricerca di un cammino aumentante cercando nella prima riga un coefficiente diverso da zero che rappresenta un arco uscente dalla sorgente con capacità positiva, lo troviamo nella colonna di V_2

$$\text{MaxFlow} = 0, V_1 \xrightarrow{3} V_2$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|cccccccc} 0 & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Ricerca di un cammino aumentante

Continuiamo nello stesso modo nella seconda riga, quella di V_2 e troviamo un coefficiente non zero nella colonna di V_5

$$\text{MaxFlow} = 0, V_1 \xrightarrow{3} V_2 \xrightarrow{5} V_5$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccccccc} 0 & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \end{array}$$

Ricerca di un cammino aumentante

Se andiamo sulla riga di V_5 troviamo un coefficiente non zero sull'ultima colonna, quella del termine e abbiamo quindi trovato un cammino aumentante e possiamo aumentare il flusso di 3

$$\text{MaxFlow} = 0, \quad V_1 \xrightarrow{3} V_2 \xrightarrow{5} V_5 \xrightarrow{4} V_8, \quad \text{Flow} = +3$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccccccc} 0 & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \end{array}$$

Costruzione di una nuova matrice di adiacenza

Ora dobbiamo costruire una nuova matrice di adiacenza e procediamo nel modo seguente:

Se f è il flusso aggiuntivo su (V_i, V_j) (che appartiene al cammino aumentante) allora diminuiamo a_{ij} di f (questa è la capacità residua dell'arco) e aumentiamo a_{ji} di f (questo è il flusso nuovo sull'arco)

- $a_{ij} = a_{ij} - f$
- $a_{ji} = a_{ji} + f$

La nuova matrice di adiacenza

La nuova matrice di adiacenza è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove abbiamo evidenziato in rosso i coefficienti che sono variati

Riprendiamo la procedura

$$\text{MaxFlow} = 3, V_1 \xrightarrow{2} V_3$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|cccccccc} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Ricerca di una cammino aumentante

$$\text{MaxFlow} = 3, V_1 \xrightarrow{2} V_3 \xrightarrow{1} V_5$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \end{array}$$

Ricerca di un cammino aumentante

$$\text{MaxFlow} = 3, V_1 \xrightarrow{2} V_3 \xrightarrow{1} V_5 \xrightarrow{3} V_2$$

$$\rightarrow \begin{array}{|cccccccc|} \hline 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Ricerca di un cammino aumentante

In questo caso non possiamo scegliere né il 3 nella prima colonna né il 2 nella quinta perché corrispondono a vertici da cui il cammino già è passato

$$\text{MaxFlow} = 3, \quad V_1 \xrightarrow{2} V_3 \xrightarrow{1} V_5 \xrightarrow{3} V_2 \xrightarrow{1} V_6$$

$$\rightarrow \begin{array}{|cccccccc|} \hline 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Ricerca di un cammino aumentante

In questo caso non possiamo scegliere né il 3 nella prima colonna né il 2 nella quinta perché corrispondono a vertici da cui il cammino già è passato

$$\text{MaxFlow} = 3, V_1 \xrightarrow{2} V_3 \xrightarrow{1} V_5 \xrightarrow{3} V_2 \xrightarrow{1} V_6 \xrightarrow{2} V_8, \text{Flow} = +1$$

$$\rightarrow \begin{array}{|cccccccc|} \hline 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

La nuova matrice di adiacenza

La nuova matrice di adiacenza è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove abbiamo evidenziato in rosso i coefficienti che sono variati

Ricerca di un cammino aumentante

$$\text{MaxFlow} = 4, \quad V_1 \xrightarrow{2} V_4 \xrightarrow{1} V_6 \xrightarrow{1} V_2 \xrightarrow{5} V_5 \\ \cdot \quad V_5 \xrightarrow{1} V_3 \xrightarrow{1} V_7 \xrightarrow{4} V_8, \quad \text{Flow} = +1$$

0	0	0	2	0	0	0	0
3	0	0	0	5	0	0	0
2	0	0	0	0	3	1	0
0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	2	0	4
0	0	0	0	3	0	0	0

dove abbiamo evidenziato in rosso i coefficienti che sono variati