# Un esempio

## Un esempio

Versione del 25 ottobre 2011

Avtor Neizvestnyi

Università di Firenze

20 Ottobre 2011

1. Esempio 01

# Il problema

L'Azienda Patatine Savory produce patatine al gusto di pizza e al sapore di peperoncino. Queste patatine devono passare attraverso tre processi principali: frittura, aromatizzazione ed imballaggio. Ogni chilo di patatine al gusto di pizza richiede 3 minuti per friggere, 5 minuti per insaporire e 2 minuti per il confezionamento. Ogni chilo di patatine al gusto di peperoncino richiede 3 min per friggere, 4 minuti per insaporire e 3 minuti per il confezionamento. L'utile netto su ogni chilogrammo di patatine alla pizza è 0,12 euro, mentre l'utile netto su ogni chilogrammo di patatine al peperoncino è 0.10 euro. La friggitrice è a disposizione 4 ore ogni giorno, il flavorer è disponibile 5 ore e 20 minuti al giorno, e l'impacchettarice è a disposizione 6 ore ogni giorno. Massimizzare l'utile netto utilizzando il modello matematico.

# Forma Normale

Massimizzare

$$0,12\,x_1 + 0,10\,x_2 \tag{1a}$$

Con i vincoli

$$x_1 + x_2 \leq 80 \tag{1b}$$
$$5\,x_1 + 4\,x_2 \leq 320 \tag{1c}$$
$$2\,x_1 + 3\,x_2 \leq 360 \tag{1d}$$

$$x \geq 0, \;\; x_2 \geq 0 \tag{1e}$$

# Descrizioni grafica

Iniziamo descrivendo nel piano la regione delle soluzioni ammissibile $S$ per poi individuare i punti estremi.
Iniziamo con i vincoli di non negatività per poi aggiungere, uno ad uno, tutti gli altri

# La regione ammissibile $S$

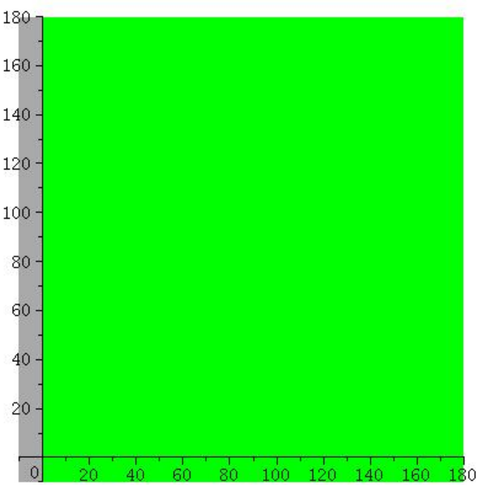


Figura: $x \geq 0$

# La regione ammissibile $S$

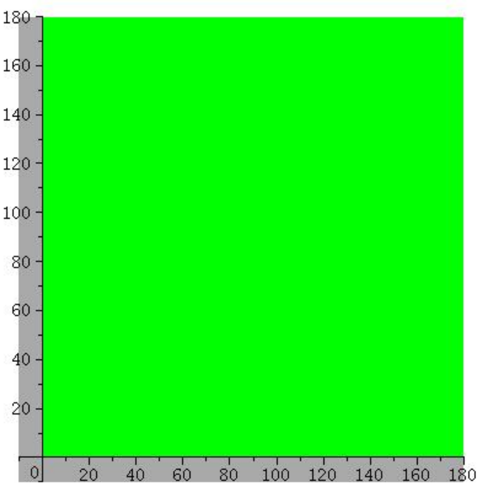


Figura: $x \geq 0, \; y \geq 0$

# La regione ammissibile $S$

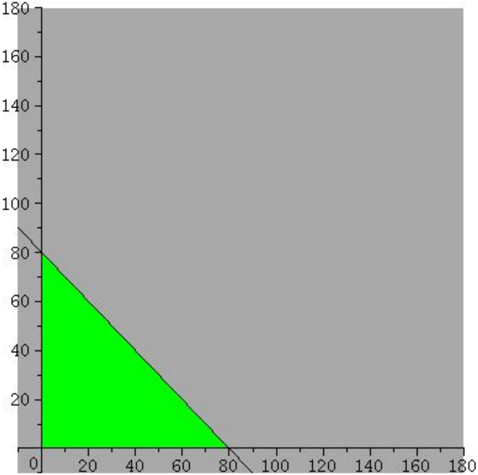


Figura: $x \geq 0, \; y \geq 0, \; x + y \leq 80$

# La regione ammissibile $S$

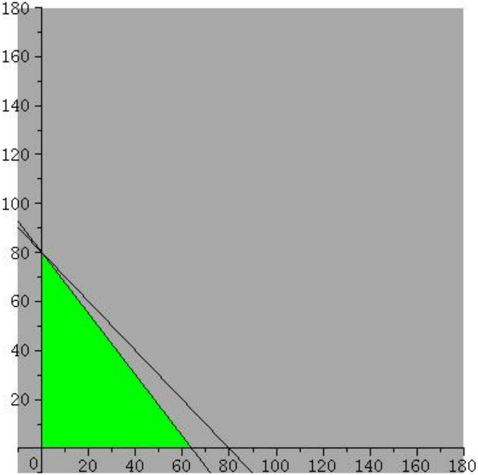


Figura: $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 80,\ 5x + 4y \leq 320$

# La regione ammissibile $S$

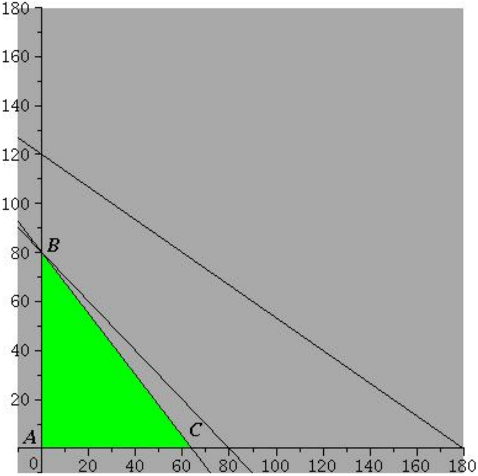


Figura: $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 80,\ 5x + 4y \leq 320,\ 2x + 3y \leq 360$

# Esempio

Come vedete, oltre ai vincoli di non negatività è importante soltanto il il secondo vincolo che è in grado di descrivere completamente la regione ammissibile, notate anche che il punto estremo $B$ è all'intersezione di tre vincoli.

# Forma Canonica

Massimizzare

$$0,12\,x_1 + 0,10\,x_2 + 0\,x_3 + 0\,x_4 + 0\,x_5 \tag{2a}$$

Con i vincoli

$$x_1 + x_2 + x_3 = 80 \tag{2b}$$
$$5\,x_1 + 4\,x_2 + x_4 = 320 \tag{2c}$$
$$2\,x_1 + 3\,x_2 + x_5 = 360 \tag{2d}$$

$$x_i \geq 0, \;\; i = 1, 2, 3, 4, 5 \tag{2e}$$

# Esempio

La matrice che descrive i vincoli nella forma canonica è

$$A := \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 80 \\ 5 & 4 & 0 & 1 & 0 & 320 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 360 \end{array}\right]$$

# Esempio

Per calcolare i punti i critici (soluzioni ammissibili di base) dobbiamo

- Scegliere tre colonne (che dobbiamo verificare essere linearmente indipendenti)
- Porre eguali a zero le variabili corrispondenti alle altre colonne variabili non di base
- Risolvere il sistema rispetto alle altre (se la soluzione è unica le colonne scelte sono indipendenti)
- Verificare che sia ammissibile

# Esempio

La strategia descritta corrisponde a risolve lineare la cui matrice completa è ottenuta da $A$ cancellando due colonne (in rosso) corrispondenti alla scelta delle due variabili non in base e risolvendo rispetto alle altre, ad esempio

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} x_1 & \color{red}{x_2} & x_3 & \color{red}{x_4} & x_5 & \\ \hline 1 & \color{red}{1} & 1 & \color{red}{0} & 0 & 80 \\ 5 & \color{red}{4} & 0 & \color{red}{1} & 0 & 320 \\ 2 & \color{red}{3} & 0 & \color{red}{0} & 1 & 360 \end{array}\right]$$

Ottenendo in questo caso $x_2 = 0, x_4 = 0, x_1 = 64, x_3 = 16, x_5 = 232$ ripetendo per i dieci casi possibili abbiamo:

# Esempio

| | non in base | | in base | | | *valore* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $x_1 = 0$ | $x_2 = 0$ | $x_3 = 80$ | $x_4 = 320$ | $x_5 = 360$ | 0 |
| $B$ | $x_1 = 0$ | $x_3 = 0$ | $x_2 = 80$ | $x_4 = 0$ | $x_5 = 120$ | 8 |
| $B$ | $x_1 = 0$ | $x_4 = 0$ | $x_2 = 80$ | $x_3 = 0$ | $x_5 = 120$ | 8 |
| | $x_1 = 0$ | $x_5 = 0$ | $x_2 = 120$ | $x_3 = -40$ | $x_4 = -160$ | *NA* |
| | $x_2 = 0$ | $x_3 = 0$ | $x_1 = 80$ | $x_4 = -80$ | $x_5 = 200$ | *NA* |
| $C$ | $x_2 = 0$ | $x_4 = 0$ | $x_1 = 64$ | $x_3 = 16$ | $x_5 = 232$ | $7,68$ |
| | $x_2 = 0$ | $x_5 = 0$ | $x_1 = 180$ | $x_3 = -100$ | $x_4 = -580$ | *NA* |
| $B$ | $x_3 = 0$ | $x_4 = 0$ | $x_1 = 0$ | $x_2 = 80$ | $x_5 = 120$ | 8 |
| | $x_3 = 0$ | $x_5 = 0$ | $x_1 = -120$ | $x_2 = 200$ | $x_4 = 120$ | *NA* |
| | $x_4 = 0$ | $x_5 = 0$ | $x_1 = -\frac{480}{7}$ | $x_2 = \frac{1160}{7}$ | $x_3 = -\frac{120}{7}$ | *NA* |

# Esempio

Come vedete il punto critico $B$ appare più volte (tre) nella lista, questo è dovuto al fatto che abbiamo una variabile di base che assume il valore zero e quindi compare sia in base che fuori di base dando luogo sempre alla stessa soluzione ammissibile di base. Questo corrisponde al fatto che il punto $B$ si trova all'incrocio di tre rette e quindi lo possiamo individuare in tre modi diversi come punto di intersezione di due di questi.