Trasporto

Trasporto

Versione del 5 dicembre 2011

Avtor Neizvestnyi

Università di Firenze

27 Ottobre 2011

Il problema del Trasporto

Supponiamo che un costruttore che produce un solo prodotto ha m fabbriche e n depositi. La domanda del j-mo deposito è $d_j,\ j = 1, 2, \ldots, n$, e il rifornimento disponibili dalla i-ma fabbrica è $s_i, i = 1, 2, \ldots, m$. Il costo per la spedizione di una unità di prodotto dalla i-ma fabbrica al j-mo deposito è c_{ij}.
Il problema è quello di determinare la quantità x_{ij} del prodotto che deve essere inviato dalla i-ma fabbrica al j-mo deposito.
Dobbiamo supporre che il rifornimento totale disponibile sia maggiora della domanda

$$\sum_{i=1}^{m} s_i \geq \sum_{j=1}^{n} d_i$$

questa è una condizione necessaria di ammissibilità, se è soddisfatta il modello è

Il modello matematico

$$\text{Minimizzare} \qquad z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, n_{ij}$$

con i vincoli

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq s_i,\ \ j = 1, 2 \ldots, m \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_j,\ \ j = 1, 2 \ldots, n \tag{7}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{e intero} \quad i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Il modello matematico

Quando riportiamo questo modello alla forma standard tutti i coefficienti della matrice dei vincoli sono 1, -1 o 0. E' possibile dimostrare , utilizzando un risultato di Hoffman e Kruskal, che in questo caso il metodo del simplesso produce automaticamente una soluzione intera se tutti gli s_i e i d_j sono interi.

Un problema di trasporto

Una linea aerea può acquistare il carburante per i suoi aerei da uno qualsiasi fra tre venditori. Il fabbisogno previsto per il prossimo mese in ciascuno dei tre aeroporti in cui opera è costituito da 100.000 litri per l'aeroporto 1, 180.000 litri per l'aeroporto 2 e 350.000 litri nell'aeroporto 3. Ciascun fornitore può fornire il carburante in ciascun aeroporto al prezzo (centesimi per litro) indicato nella tabella seguente

0	A_1	A_2	A_3
V_1	92	89	90
V_2	91	91	95
V_3	87	90	92

Ciascun venditore può fornire ciascun mese una quantità limitata di carburante. Le singole capacità sono: 320.000 litri per il venditore 1, 270.000 litri per il venditore 2 e 190000 litri per il venditore 3. Si determini una politica di acquisto che soddisfi il fabbisogno della linea aerea in ciascun aeroporto a costo totale minimo.

Il problema

la matrice che descrive il problema è quindi

$$\begin{bmatrix} 92 & 89 & 90 \\ 91 & 91 & 95 \\ 87 & 90 & 92 \end{bmatrix}$$

e i due vettori che descrivono disponibilità e domanda sono

$$s := [320000, 270000, 190000], \quad d := [100000, 180000, 350000]$$

Il problema del Trasporto

Per prima cosa verifichiamo la condizione di compatibilità

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = 780.000 \geq \sum_{j=1}^{n} d_i = 630.000$$

La funzione obiettivo da minimizzare è

$$\begin{aligned} z = {} & 92\,x_{11} + 89\,x_{12} + 90\,x_{13} + \\ & + 91\,x_{21} + 91\,x_{22} + 95\,x_{23} + \\ & + 87\,x_{31} + 90\,x_{32} + 92\,x_{33} \end{aligned}$$

Il problema

Vincoli che descrivono la disponibilità limitata di carburante

$$x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} \leq 320000$$
$$x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} \leq 270000$$
$$x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} \leq 190000$$

vincoli che richiedono che la domanda sia soddisfatta

$$100000 \leq x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1}$$
$$180000 \leq x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2}$$
$$350000 \leq x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3}$$

Il problema

La soluzione che troviamo è

$$x_{1,1} = 0, x_{1,2} = 0, x_{1,3} = 320000,$$
$$x_{2,1} = 0, x_{2,2} = 120000, x_{2,3} = 0,$$
$$x_{3,1} = 100000, x_{3,2} = 60000, x_{3,3} = 30000$$

Con un valore della funzione obiettivo di 56.580.000
L'espressione finale della funzione obiettivo è

$$\begin{aligned} z = & 56580000 + 7\,x_{1,1} + x_{1,2} + 3\,x_{2,1} + \\ & + 2\,x_{2,3} + 3\,sl_1 + sl_3 + \\ & + 88\,sl_4 + 91\,sl_5 + 93\,sl_6 \end{aligned}$$

Le variabili di slack corrispondenti ai vincoli sulla domanda sono in base e quindi valgono zero e i vincoli sono tutti soddisfatti con l'eguaglianza come deve essere. Perché?