Assegnazione

Assegnazione

Versione del 5 dicembre 2011

Avtor Neizvestnyi

Università di Firenze

27 Ottobre 2011

Il problema dell'assegnazione

n $P_1, P_2 \ldots, P_n$, persone sono prese in esame per n incarichi differenti $J_1, J_2 \ldots, J_n$. Utilizzando criteri di diverso tipo come esperienze precedenti conoscenze, attitudine capacità specifiche viene determinato un o specifico valore c_{ij} che verrebbe raggiunto se la i-ma persona fosse assegnata al lavoro $j-$mo. Vogliamo che ciascuna persona venga assegnata ad un unico lavoro e che ogni lavoro sia affidato ad una sola persona.
Il problema dell'assegnazione consiste nell'assegnare le persone ai lavori in modo da massimizzare il valore totale dell'assegnazione.

Le variabili decisionali

Per costruire il modello matematico dobbiamo, per prima cosa definire le variabili decisionali si tratta in questo caso di variabili binarie X_{ij} il cui significato è il seguente

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } P_i \text{ è assegnata a } J_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il significato di binario è esattamente questo e cioè che le variabili possono assumere solo il valore zero o uno

Il modello matematico

$$\text{Massimizzare} \qquad z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} X_{ij}$$

con i vincoli

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1, \ j = 1, 2 \ldots, n \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1, \ i = 1, 2 \ldots, n \tag{4}$$

$$X_{ij} \in \{0, 1\} \tag{5}$$

Significato dei vincoli

Poichè la variabile binaria X_{ij} può assumere solo il valore 0 o 1, soltanto uno degli addendi nell'equazione (4) può essere diverso da zero, e, analogamente, soltanto uno degli addendi nell'equazione (5) può essere diverso da zero.
Il vincolo (4) dice che il lavoro j è assegnato soltanto ad una persona mentre il vincolo (5) afferma che la persona i è assegnata soltanto ad un lavoro. Un Teorema dovuto a Hoffman and Kruskal può essere applicato e garantisce che l'algoritmo del simplesso troverà una soluzione zero/uno al problema dell'assegnazione.
Il motivo è legato alla struttura del vincoli che è descritto da una serie di eguaglianze in le variabili compaiono tutte con coefficiente uno

Un problema di assegnazione

Un allenatore di una squadra di nuoto ha la necessità di assegnare i nuotatori per una staffetta 4 x 100 mista per un incontro internazionale. Poiché alcuni nuotatori sono molto veloci in più di uno stile non è chiaro quale sia l'assegnazione migliore. I cinque migliori nuotatori e i loro tempi (in secondi) per 50 m nei quattro stili sono elencati sotto

	Carlo	*Cristiano*	*Davide*	*Antonio*	*Marco*
Dorso	37.7	32.9	33.8	37.0	35.4
Rana	43.4	33.1	42.2	34.7	41.8
Farfalla	33.3	28.5	38.9	30.4	33.6
Stile libero	29.2	26.4	29.6	28.5	31.1

Poiché abbiamo cinque nuotatori e solo quattro stili dobbiamo aggiungere un altro stile inventato a cui sarà assegnato il nuotatore escluso e che non contribuisce al tempo della staffetta.

Il problema

la matrice che descrive il problema è quindi

$$\begin{bmatrix} 37.7 & 32.9 & 33.8 & 37.0 & 35.4 \\ 43.4 & 33.1 & 42.2 & 34.7 & 41.8 \\ 33.3 & 28.5 & 38.9 & 30.4 & 33.6 \\ 29.2 & 26.4 & 29.6 & 28.5 & 31.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il problema

Introduciamo le variabili decisionali

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & X_{15} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} & X_{25} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} & X_{35} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} & X_{45} \\ X_{51} & X_{52} & X_{53} & X_{54} & X_{55} \end{bmatrix}$$

Queste variabili possono assumere solo valore zero o uno, $X_{ij} \in \{0, 1\}$.
$X_{ij} = 1$ vuol dire che assegnamo il nuotatore j allo stile i

Il problema

La funzione obiettivo da minimizzare è

$$
\begin{aligned}
z = {} & 37.7\,X_{11} + 32.9\,X_{12} + 33.8\,X_{13} + 37.0\,X_{14} + 35.4\,X_{15} + \\
& +43.4\,X_{21} + 33.1\,X_{22} + 42.2\,X_{23} + 34.7\,X_{24} + 41.8\,X_{25} + \\
& +33.3\,X_{31} + 28.5\,X_{32} + 38.9\,X_{33} + 30.4\,X_{34} + 33.6\,X_{35} + \\
& +29.2\,X_{41} + 26.4\,X_{42} + 29.6\,X_{43} + 28.5\,X_{44} + 31.1\,X_{45}
\end{aligned}
$$

Il problema

Per garantirci che a ciascuno stile sia assegnato un solo nuotatore dobbiamo imporre che

$$
\begin{aligned}
X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} &= 1 \\
X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} &= 1 \\
X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} &= 1 \\
X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} + X_{45} &= 1 \\
X_{51} + X_{52} + X_{53} + X_{54} + X_{55} &= 1
\end{aligned}
$$

Il problema

Per garantirci che un nuotatore sia assegnato ad un solo stile dobbiamo imporre che

$$
\begin{aligned}
X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} + X_{51} &= 1\\
X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} + X_{52} &= 1\\
X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} + X_{53} &= 1\\
X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} + X_{54} &= 1\\
X_{15} + X_{25} + X_{35} + X_{45} + X_{55} &= 1
\end{aligned}
$$

Il problema

La soluzione che troviamo è

$$
\begin{gathered}
X_{11}=0, X_{12}=0, X_{13}=1, X_{14}=0, X_{15}=0, \\
X_{21}=0, X_{22}=0, X_{23}=0, X_{24}=1, X_{25}=0, \\
X_{31}=0, X_{32}=1, X_{33}=0, X_{34}=0, X_{35}=0, \\
X_{41}=1, X_{42}=0, X_{43}=0, X_{44}=0, X_{45}=0, \\
X_{51}=0, X_{52}=0, X_{53}=0, X_{54}=0, X_{55}=1
\end{gathered}
$$

Con un tempo presunto per la staffetta di 126.2 secondi