Un esempio

Un esempio

Versione del 30 novembre 2011

Avtor Neizvestnyi

Università di Firenze

27 Ottobre 2011

Problema originario

Trovare una soluzione ottima, se esiste, del seguente problema di PL

$$
\begin{aligned}
\text{Massimizzare} \quad & 2\,x_1 + x_2 + 3\,x_3 \\
\text{con i vincoli} \quad & \\
2\,x_1 + x_2 + x_3 &\le 14 \\
x_2 - 2\,x_3 &\ge 3 \\
x_1 + 2\,x_2 - 3\,x_3 &= 12 \\
x_i \ge 0, \quad & i = 1,\,2,\,3
\end{aligned}
$$

Problema originario

Dividiamo il vincolo di eguaglianza in due vincoli di diseguaglianza

$$\begin{aligned} \text{Massimizzare} \quad & 2\,x_1 + x_2 + 3\,x_3 \\ \text{con i vincoli} \quad & \\ & 2\,x_1 + x_2 + x_3 \leq 14 \\ & x_2 - 2\,x_3 \geq 3 \\ & x_1 + 2\,x_2 - 3\,x_3 \leq 12 \\ & x_1 + 2\,x_2 - 3\,x_3 \geq 12 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1,\, 2,\, 3 \end{aligned}$$

Vedremo dopo come fare direttamente con il vincolo di eguaglianza, in questo modo vediamo più facilmente il significato delle due variabili duale associate a questo vincolo

PRIMA FASE - Problema ausiliario

L'introduzione delle variabili artificiali ci costringe a cercare di renderle zero per trovare una soluzione ammissibile per il problema originario. Per fare questo dobbiamo prima risolvere il problema ausiliario

$$\begin{aligned}
\text{Massimizzare} \quad & -a_1 - a_2 \\
\text{con i vincoli} \quad & \\
& 2\,x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 14 \\
& x_2 - 2\,x_3 - s_2 + a_1 = 3 \\
& x_1 + 2\,x_2 - 3\,x_3 + s_3 = 12 \\
& x_1 + 2\,x_2 - 3\,x_3 - s_4 + a_2 = 12
\end{aligned}$$

Problema ausiliario

Scriviamo il tableau iniziale del problema ausiliario ottenuto introducendo tre variabili ausiliarie s_1, s_2, s_3 due variabili artificiali a_1, a_2

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & a_1 & s_3 & s_4 & a_2 & b \\
\hline
2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\
0 & 1 & -2 & 0 & -1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 3 \\
1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \\
1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 12 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]$$

Le variabili artificiali sono in base ma hanno coefficienti non nulli nella funzione obiettivo. Elimino la prima variabile artificiale dalla funzione obiettivo

Problema ausiliario

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & a_1 & s_3 & s_4 & a_2 & b \\
\hline
2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\
0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \\
1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \boxed{1} & 12 \\
\hline
0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3
\end{array}\right]$$

Elimino la seconda variabile artificiale dalla funzione obiettivo

Problema ausiliario

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & a_1 & s_3 & s_4 & a_2 & b \\
\hline
2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\
0 & \boxed{1} & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \\
1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 12 \\
\hline
-1 & -3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -15
\end{array}\right]$$

Posso iniziare il simplesso, decido di fare entrare x_2 ed uscire a_1

Problema ausiliario

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & a_1 & s_3 & s_4 & a_2 & b \\
\hline
2 & 0 & 3 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 11 \\
0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 6 \\
1 & 0 & 1 & 0 & \boxed{2} & -2 & 0 & -1 & 1 & 6 \\
\hline
-1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & -6
\end{array}\right]
$$

Continuo il simplesso, decido di fare entrare s_2 ed ho una parità fra le due variabili uscenti a_1, s_3 scelgo a_1

Problema ausiliario

$$
\left[
\begin{array}{ccccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & a_1 & s_3 & s_4 & a_2 & b \\
\hline
3/2 & 0 & 5/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 8 \\
1/2 & 1 & -3/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 3 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {\color{red}1} & 0 & 0 & {\color{red}1} & 0
\end{array}
\right]
$$

la soluzione trovata è ottima per il problema ausiliario ed ho quindi trovato una soluzione ammissibile per il problema originale e posso cancellare le due colonne delle variabili artificiali e inserire la nuova riga della funzione obiettivo originaria

$$x_2 = 6,\ s_1 = 8,\ s_2 = 3,\ s_3 = 0$$

Problema originario

SIMPLESSO. Partiamo da

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & b \\
\hline
3/2 & 0 & 5/2 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 8 \\
1/2 & \boxed{1} & -3/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 3 \\
\hline
-2 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

Dobbiamo eliminare il coefficiente di x_2 che è in base dalla funzione obiettivo

Problema originario

Da qui parte il simplesso per il problema originario

$$
\left[\begin{array}{ccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & b \\
\hline
3/2 & 0 & 5/2 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 8 \\
1/2 & 1 & -3/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 3 \\
\hline
-3/2 & 0 & -9/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 6
\end{array}\right]
$$

Ma torniamo un attimo indietro

Problema ausiliario

Provo ora a vedere cosa sarebbe successo se non avessi scelto a_1 come variabile uscente (cosa da non fare perché lasciare in base una variabile che voglio far diventare zero non è utile)

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & a_1 & s_3 & s_4 & a_2 & b \\
\hline
2 & 0 & 3 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 11 \\
0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
1 & 0 & 1 & 0 & \boxed{2} & -2 & 1 & 0 & 0 & 6 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 & 6 \\
\hline
-1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & -6
\end{array}\right]
$$

Riprendo il simplesso dal tableau dove avevo parità fra le variabili uscenti e decido di fare entrare s_2 ed ho una parità fra le due variabili uscenti a_1, s_3 scelgo s_3

Problema ausiliario

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & a_1 & s_3 & s_4 & a_2 & b \\
\hline
3/2 & 0 & 5/2 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 8 \\
1/2 & 1 & -3/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 6 \\
1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

la soluzione trovata è ottima per il problema ausiliario ed ho quindi ho trovato una soluzione ammissibile per il problema originale

$$x_2^* = 6,\ s_1^* = 8,\ s_2 = 3,\ a_2^* = 0,\ z^* = 0$$

Che identifica la stessa soluzione di prima ma con una base diversa.
Ma se cancello le due colonne delle variabili artificiali non trovo un tableau ammissibile perché ho cancellato una delle colonne della matrice identità.

Problema ausiliario

Esaminiamo il tableau finale del problema ausiliario. Ci sono delle variabili NON in base il cui coefficiente nell'espressione della funzione obiettivo è zero x_1, x_3

$$z = \boxed{0 \cdot x_1} + 0 \cdot x_2 + \boxed{0 \cdot x_3} + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 1 \cdot a_1 + 1 \cdot s_3 + 1 \cdot s_4 + 0 \cdot a_2 + 0$$

Questo vuol dire che la soluzione che abbiamo trovato non è unica. In effetti se facciamo entrare in base queste due variabili esse potrebbero diventare positive ma il loro contributo alla funzione obbiettivo sarebbe sempre zero perché il loro incremento deve essere moltiplicato per zero e quindi le posso fare entrare in base mantenendo l'ottimalità.

Problema ausiliario

Entra $x_1$ed esce s_1

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & a_1 & s_3 & s_4 & a_2 & b \\
\hline
1 & 0 & 5/3 & 2/3 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & 0 & 16/3 \\
0 & 1 & -7/3 & -1/3 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 10/3 \\
0 & 0 & -1/3 & -1/3 & 1 & -1 & 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

La soluzione è ancora ottima ma diversa dalla precedente

$$x_1^* = \frac{16}{3},\ x_2^* = \frac{10}{3},\ s_2^* = \frac{1}{2},\ a_2^* = 0,\ z^* = 0$$

Problema ausiliario

Entra x_3 ed esce x_1

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & a_1 & s_3 & s_4 & a_2 & b \\ \hline 3/5 & 0 & 1 & 2/5 & 0 & 0 & -1/5 & 0 & 0 & \frac{16}{5} \\ 7/5 & 1 & 0 & 3/5 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & \frac{54}{5} \\ 1/5 & 0 & 0 & -1/5 & 1 & -1 & 3/5 & 0 & 0 & 7/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La soluzione è ancora ottima ma diversa dalla precedente

$$x_2^* = \frac{54}{5},\ x_3^* = \frac{16}{5},\ s_1^* = \frac{7}{5},\ a_2^* = 0,\ z = 0$$

Problema ausiliario

Entra s_1 ed esce x_3

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & a_1 & s_3 & s_4 & a_2 & b \\ \hline 3/2 & 0 & 5/2 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 8 \\ 1/2 & 1 & -3/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La soluzione è ancora ottima e siamo tornati alla prima che abbiamo trovato e allo stesso tableau

$$x_2^* = 6,\ s_1^* = 8,\ s_2^* = 3,\ a_2^* = 0,\ z^* = 0$$

Abbiamo trovato tre soluzioni ammissibili per il problema originario e quindi tutta la faccia del poliedro che ha questi tre punti come punti estremi appartiene alla regione di ammissibilità

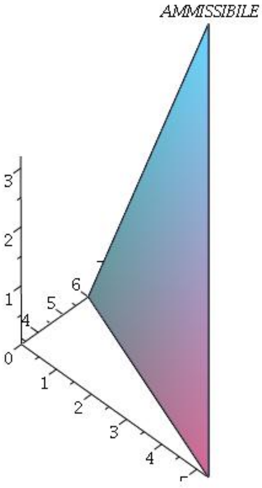

Figura: $x \geq 0$

Soluzioni multiple

Soluzioni multiple

Se nell'espressione finale (ottima) della funzione obiettivo appaiono dei coefficienti nulli corrispondenti a delle variabili NON in base vuol dire che siamo in presenza di soluzioni multiple che possiamo trovare facendo entrare in base queste variabili.
Questo è possibile perché il loro contributo all'incremento della funzione obbiettivo è zero e quindi il suo valore rimane ottimo.

Problema ausiliario - Caso degenere

Siamo in un caso degenere : La variabile a_2 è in base ma vale zero
In questa situazione possiamo fare entrare in base qualsiasi variabile che abbia un coefficiente diverso da zero nella riga della variabile degenere perché entrando in base dovrà necessariamente conservare il valore zero a causa del test del quoziente fatto con un termine noto zero.
Contrariamente a prima la soluzione non cambia ma cambia la base rispetto alla quale è scritta. Facciamo entrare s_4 ed uscire a_2

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & a_1 & s_3 & s_4 & a_2 & b \\
\hline
3/2 & 0 & 5/2 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 8 \\
1/2 & 1 & -3/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 6 \\
1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

Abbiamo soltanto modificato la base

Problema ausiliario

Possiamo provare anche con l'altro coefficiente non nullo: entra s_3 ed esce a_2

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & a_1 & s_3 & s_4 & a_2 & b \\
\hline
3/2 & 0 & 5/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 8 \\
1/2 & 1 & -3/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 6 \\
1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
$$

Abbiamo una soluzione ottima del problema ausiliario ed un ammissibile del problema originario. Come vedete la soluzione non è cambiate ma delle variabili con valore zero sono entrate e uscite dalla base

Problema originario

Cancello le colonne delle variabili ausiliarie e inserisco la funzione obiettivo originaria

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & b \\
\hline
3/2 & 0 & 5/2 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 8 \\
1/2 & 1 & -3/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 6 \\
1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
-2 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

Che è esattamente il tableau che avevo trovato in precedenza

Problema originario

Devo cancellare il coefficiente di x_2 che è in base dalla funzione obiettivo

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & b \\
\hline
3/2 & 0 & 5/2 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 8 \\
1/2 & 1 & -3/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 6 \\
1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
-3/2 & 0 & -9/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 6
\end{array}\right]$$

ora il tableau è nella forma giusta

Problema originario

Entra x_3 ed esce s_1

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & b \\
\hline
3/5 & 0 & 1 & 2/5 & 0 & 0 & 1/5 & \frac{16}{5} \\
7/5 & 1 & 0 & 3/5 & 0 & 0 & -1/5 & \frac{54}{5} \\
1/5 & 0 & 0 & -1/5 & 1 & 0 & -3/5 & 7/5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
6/5 & 0 & 0 & 9/5 & 0 & 0 & 2/5 & \frac{102}{5}
\end{array}\right]$$

Ho trovato la soluzione ottima

$$x_1^* = 0,\ x_2^* = \frac{54}{5},\ x_3^* = \frac{16}{5},\ s_1^* = 0,\ s_2^* = \frac{7}{5},\ s_3^* = 0,\ s_4 = 0$$

$$z^* = \frac{102}{5} + \frac{6}{5}\,x_1^* + \frac{9}{5}\,s_1^* + \frac{2}{5}\,s_4^*$$

Problema originario

Sostituendo la soluzione nel problema originario otteniamo

$$\text{Massimizzare} \quad \frac{54}{5} + 3\,\frac{16}{5} = \frac{102}{5}$$

con i vincoli

$$\frac{54}{5} + \frac{16}{5} = 14 \leq 14$$
$$\frac{54}{5} - 2\,\frac{16}{5} = \frac{22}{5} \geq 3$$
$$\frac{54}{5} - 3\,\frac{16}{5} = 12 \leq 12$$
$$\frac{54}{5} - 3\,\frac{16}{5} = 12 \geq 12$$

Il primo vincolo è soddisfatto con l'eguaglianza e quindi $s_1 = 0$
Il primo vincolo è soddisfatto con la disuguaglianza stretta e quindi $s_2^* = \frac{7}{5}$
Gli altri due, necessariamente, con l'eguaglianza e quindi $s_3^* = 0$, $s_4 = 0$

La soluzione del duale

Esaminando i coefficienti delle variabili di slack nell'espressione finale della funzione obiettivo possiamo affermare che la soluzione ottima del duale è

$$s_1^* = \frac{6}{5},\ s_2^* = 0,\ s_3 = 0,\ w_1^* = \frac{9}{5},\ w_2^* = 0, w_3^* = 0,\ w_4^* = \frac{2}{5}$$

Problema duale

Scriviamo il problema originario in forma standard

$$
\begin{aligned}
\text{Massimizzare} \quad & 2\,x_1 + x_2 + 3\,x_3 \\
\text{con i vincoli} \quad & \\
& 2\,x_1 + x_2 + x_3 \le 14 \\
& -x_2 + 2\,x_3 \le -3 \\
& x_1 + 2\,x_2 - 3\,x_3 \le 12 \\
& -x_1 - 2\,x_2 + 3\,x_3 \le -12 \\
& x_i \ge 0, \quad i = 1,\, 2,\, 3
\end{aligned}
$$

Problema duale

Scriviamo il problema duale

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizzare} \quad & 14\,w_1 - 3w_2 + 12\,w_3 - 12\,w_4 \\
\text{con i vincoli} \quad & \\
2\,w_1 + w_3 - w_4 &\geq 2 \\
w_1 - w_2 + 2\,w_3 - 2\,w_4 &\geq 1 \\
w_1 + 2\,w_2 - 3\,x_3 + 3\,w_4 &\geq 3 \\
w_i \geq 0, \quad & i = 1,\, 2,\, 3,\, 4
\end{aligned}
$$

Le variabili duali

1. $w_1^* = \frac{9}{5}$ ci dice che un eventuale *piccolo* aumento di $h > 0$ della disponibilità della prima risorsa $(14 \to 14 + h)$ induce un aumento della funzione obiettivo

$$z^* = \frac{102}{5} \to z^* = \frac{102}{5} + \frac{9}{5}\,h$$

per h *piccolo*

2. $w_2^* = 0$ ci dice che una eventuale *piccola* diminuizione $(-3 \to -3 + h,\ h > 0$ ovvero $(3 \to 3 - h,\ h > 0)$ del termine noto del secondo vincolo non contribuisce all'aumento della funzione obiettivo

$$z^* = \frac{102}{5} \to z^* = \frac{102}{5} + 0 \cdot h,\ h > 0$$

Le variabili duali

2. $w_3^* = 0,\ w_4^* = \frac{2}{5}$ corrispondono entrambi al vincolo di eguaglianza e ci dicono che un eventuale *piccolo* aumento il termine noto non contribuisce all'aumento della funzione obiettivo

$$z^* = \frac{102}{5} \to z^* = \frac{102}{5} + 0\,h,\ h > 0$$

mentre una sua eventuale *piccola* diminuizione si

$$z^* = \frac{102}{5} \to z^* = \frac{102}{5} + \frac{2}{5}\,h,\ h < 0$$

Le variabili duali

In termini normali .. se indichiamo con $z = z(b_1, b_2, b_3)$ il valore della funzione obiettivo abbiamo che

$$Dz(b_1, 3, 12)_{|b_1=14} = \frac{9}{5},\ Dz(14, b_2, 12)_{|b_2=3} = 0,$$

$$D^+z(14, 3, b_3)_{|b_3=12} = 0,\ D^-z(14, 3, b_3)_{|b_3=12} = \frac{2}{5}$$

Problema duale

Riscriviamo il problema duale notando che possiamo isolare $(w_3 - w_4)$

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizzare} \quad & 14\, w_1 - 3w_2 + 12(w_3 - w_4) \\
\text{con i vincoli} \quad & \\
& 2\, w_1 + (w_3 - w_4) \geq 2 \\
& w_1 - w_2 + 2(w_3 - w_4) \geq 1 \\
& w_1 + 2\, w_2 - 3(w_3 - w_4) \geq 3 \\
& w_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4
\end{aligned}
$$

Problema duale

Poniamo $w_1 = y_1,\ w_2 = y_2,\ w_3 - w_4 = y_3$

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizzare} \quad & 14\, y_1 - 3y_2 + 12\, y_3 \\
\text{con i vincoli} \quad & \\
& 2\, y_1 + y_3 \geq 2 \\
& y_1 - y_2 + 2\, y_3 \geq 1 \\
& y_1 + 2\, y_2 - 3\, y_3 \geq 3 \\
& y_i \geq 0, \quad i = 1,\, 2,\ y_3 \in R
\end{aligned}
$$

Problema duale

Che ha come soluzione ottima

$$s_1^* = \frac{6}{5},\ s_2^* = 0,\ s_3 = 0,\ y_1^* = \frac{9}{5},\ y_2^* = 0, y_3^* = -\frac{2}{5}$$

ed ora il significato della variabile duale corrispondente al vincolo di eguaglianza negativa dovrebbe essere chiaro.