INTRODUZIONE

Negli ultimi trenta anni si è assistito ad una esplosione di interesse nello studio dei sistemi dinamici non-lineari. Da un lato i grandi progressi teorici nell'approccio topologico qualitativo e dall'altro la sempre più ampia disponibilità di potenti computer hanno stimolato e sostenuto nuove applicazioni nel campo delle scienze economiche, biologiche, ecologiche e sociali, ben lontano dai tradizionali settori della meccanica, fisica e chimica.
La moderna teoria dei sistemi dinamici ha una storia relativamente breve.
Fu Poincaré, sul finire del secolo scorso, che rivoluzionò lo studio delle equazioni differenziali non-lineari introducendo le tecniche qualitative della geometria e della topologia, al fine di poter comprendere le proprietà "globali" delle soluzioni di questi sistemi. Per Poincaré la conoscenza, sia pur approssimativa, del comportamento di tutte le soluzioni del sistema era più importante della conoscenza del comportamento "locale" di particolari soluzioni ottenuta analiticamente.
Tale punto di vista fu successivamente, all'inizio del XX secolo, adottato da Birkhoff, il quale enfatizzò l'importanza delle dinamiche discrete anche come mezzo per la comprensione delle dinamiche più complesse manifestate dalle equazioni differenziali.
Tutto ciò dette il via al fiorire di studi teorici che portarono, nella prima metà del nostro secolo a notevoli progressi ottenuti, soprattutto in Unione Sovietica e negli Stati Uniti, grazie al lavoro di matematici come Liapounov, Pontryagin, Andronov, Cartwright, Littlewood, Morse.
Gli anni '60 hanno conosciuto un vigoroso risveglio dell'interesse per tali argomenti.
Smale, Moser, Peixoto, Kolmogorov, Arnold, Sinai ed altri hanno conseguito in quel periodo risultati fondamentali ed hanno impresso alla ricerca quell'impulso che doveva consacrare definitivamente la teoria dei sistemi dinamici come uno dei più importanti settori di indagine in ambito matematico.
La scoperta che regole o leggi perfettamente deterministiche possano produrre un moto completamente caotico e assolutamente imprevedibile ha avvicinato alla teoria l'interesse degli studiosi di diversi altri campi. Questo fenomeno, noto con il nome di "Caos Deterministico", è ritenuto, da alcuni, il punto di partenza della terza grande rivoluzione scientifica di questo secolo, dopo la relatività e la meccanica quantistica.

> *"Una causa piccolissima che sfugge alla nostra attenzione determina un effetto considerevole che non possiamo mancare di vedere, e allora diciamo che l'effetto è dovuto al caso. Se conoscessimo esattamente le leggi della natura e la situazione dell'universo all'istante iniziale, potremmo prevedere esattamente la situazione dello stesso universo in un istante successivo. Ma se pure accadesse che le leggi naturali non avessero più alcun segreto per noi, anche in tal caso potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente. Se questo ci permettesse di prevedere la situazione*

successiva con la stessa approssimazione, non ci occorrerebbe di più e dovremmo dire che il fenomeno è stato previsto, che è governato da leggi. Ma non sempre è così ; può accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano di grandissime nei fenomeni finali. Un piccolo errore nelle prime produce un errore enorme nei secondi. La previsione diventa impossibile e si ha un fenomeno fortuito". (Poincaré, *Scienza e Metodo*)

Con queste parole, all'inizio del secolo, Poincaré rilevò l'importanza di un fenomeno, la "dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali", che, negli anni '80, sarebbe stata alla base della definizione matematica di "caos" e della creazione di un nuovo paradigma scientifico.

Questa tesi affronta tematiche che appartengono interamente a tale ambito teorico.

Nello studio di un sistema dinamico, il nostro interesse va alla comprensione della sua evoluzione futura e di come essa sia influenzata dalle condizioni iniziali. A questo fine la teoria fornisce, come principale elemento guida, il concetto di "attrattore". In prima approssimazione possiamo definire attrattore l'insieme degli stati verso i quali tende asintoticamente il sistema nella sua evoluzione. Si possono avere diversi tipi di attrattore. Nel caso più semplice si tratta di un punto di equilibrio stazionario : è il caso che si verifica quando un pendolo vede il proprio movimento smorzarsi avvicinandosi, senza mai raggiungerlo, al suo punto di quiete. Il successivo livello di complessità si ha con gli attrattori periodici, nel qual caso il sistema vedrà la propria posizione oscillare periodicamente fra due o più stati. La situazione può complicarsi ulteriormente quando il moto è costituito da due o più oscillazioni indipendenti. In tale situazione l'attrattore avrà la forma di un toro avente un numero di dimensioni pari a quello delle oscillazioni indipendenti che determinano il moto. Infine si possono presentare i cosiddetti "attrattori strani" (o caotici), sui quali la soluzione di un ben definito sistema deterministico "appare casuale".

Vedremo inoltre che anche nel caso delle cosiddette "scienze esatte", le equazioni di un qualsiasi modello non sono mai conosciute, con assoluta precisione. Così dovremo esplorare la stabilità del modello stesso per capire se lo stato raggiunto dal sistema rimarrebbe il medesimo, qualora le equazioni fossero leggermente diverse. Tale questione di "robustezza" del modello è formalizzata nel concetto di "stabilità strutturale".

Un terzo aspetto riguarda le modificazioni che subisce la dinamica del sistema qualora venga variato il valore dei parametri dai quali esso dipende. Se a piccoli cambiamenti di tali valori corrispondono piccoli cambiamenti nella dinamica, il sistema è robusto rispetto a variazioni dei coefficienti. Se invece, al variare di tali valori, si manifestasse un cambiamento repentino della dinamica, saremmo in presenza di un valore di biforcazione. Se il sistema si trova in uno stato stazionario, in uno stato di moto periodico o caotico, la capacità di prevedere ogni improvviso cambiamento è di cruciale importanza. Tali "biforcazioni" del comportamento si verificano quando lo spazio delle fasi subisce un mutamento qualitativo della sua forma topologica.

Un'importante distinzione che metterò in evidenza sarà quella tra biforcazioni catastrofiche, in presenza delle quali si verifica un rapido salto verso un diverso stato di equilibrio, e biforcazioni non catastrofiche (o subdole), per le quali il cambiamento si manifesta con la graduale crescita di un nuovo attrattore locale.
Nel primo capitolo, si prendono in considerazione i sistemi dinamici in una dimensione.
Nonostante l'apparente semplicità, le mappe della retta reale e del cerchio mi consentiranno di introdurre quasi tutte le più importanti idee e tecniche necessarie all'analisi delle dinamiche non-lineari.
Dopo aver introdotto alcuni concetti elementari e fornito le definizioni di base, faremo la conoscenza di un'importante mappa della retta reale : la mappa logistica, la cui forma analitica è data dalla

$$F_{\mu}(x) = \mu x(1-x)$$

Si tratta di una mappa quadratica dipendente dal valore di un parametro, μ, la cui dinamica presenta un insieme di caratteristiche estremamente interessanti, sia per quanto riguarda la ricchezza delle tipologie dinamiche manifestate che per la loro complessità. Tale mappa sarà il modello sul quale condurremo l'analisi dei diversi concetti e delle tecniche che introdurremo nei paragrafi successivi.
Strumento fondamentale di tale analisi sarà la dinamica simbolica, uno degli argomenti ricorrenti in tutto il lavoro.
Con la dinamica simbolica introdurrò un nuovo tipo di mappa, lo "shift di Bernoulli", definita sullo spazio delle sequenze infinite di 0 e 1, la cui dinamica risulta essere "topologicamente equivalente" a quella che la mappa logistica manifesta per certi valori del parametro. Poiché la mappa shift è molto semplice da comprendere, la userò come modello per lo studio delle dinamiche complesse, sviluppate dalla logistica. Si tratta di un "modello" del "modello", quindi.
Tali dinamiche complesse, ci portano direttamente a dare la definizione di "caos", secondo argomento ricorrente e punto cardine della teoria dei sistemi dinamici. Secondo la definizione che seguirò, una dinamica si intende caotica se è "impredicibile", "indecomponibile" e inoltre possiede un elemento di "regolarità". Chiariremo al momento opportuno tale fatto. Per adesso basta osservare che una dinamica caotica non consente di determinare a priori quale sarà la sua evoluzione futura.
Il problema della predicibilità è, da un altro punto di vista, strettamente collegato ai concetti di stabilità strutturale e di biforcazione.
La stabilità strutturale ci garantisce che modificando di poco la mappa, la dinamica globale non cambia. Come ho già detto si tratta di un concetto fondamentale per le applicazioni in quanto, data la imperfetta conoscenza della realtà e la necessaria approssimazione dei modelli, la mancanza di stabilità strutturale farebbe perdere ogni significato pratico ai risultati ottenuti.
Al concetto di biforcazione ho già accennato. Adesso osserviamo che i mutamenti della dinamica cui può portare il cambiamento nel valore di un parametro, possono essere in

prima approssimazione classificati in due gruppi ; quello delle biforcazioni locali e quello delle biforcazioni globali. Le prime sono quelle che interessano i punti di equilibrio del sistema con la conseguenza che possono, o meno, estendersi alla dinamica globale; le seconde, invece, comportano mutamenti improvvisi della dinamica globale dovuti a fenomeni più complessi e, in molti casi, ancora non del tutto compresi.

Forniremo gli strumenti analitici necessari ad uno studio approfondito della stabilità locale dei punti di equilibrio del sistema e delle biforcazioni cui possono soggiacere. Inoltre porrò in evidenza il concetto di punto omo- ed eteroclinico, punti la cui "storia" è cominciata e finirà vicino (o sopra) ad un punto di equilibrio, ed il ruolo da essi ricoperto in alcune tipologie di biforcazioni globali.

L'ultimo concetto fondamentale è quello di punto critico (in una dimensione si tratta dei punti di minimo o massimo relativo). Utilizzando una costruzione teorica mutuata dalla dinamica simbolica, mostrerò che la traiettoria percorsa dal punto critico (o dai punti critici) è in grado di fornirci tutte le informazioni necessarie alla comprensione della dinamica globale del sistema. Per fare ciò procederemo per gradi, considerando prima le mappe unimodali (mappe con un solo massimo o minimo relativo) ed estendendo successivamente tale costruzione a mappe con un numero qualunque (purché finito) di punti critici.

Nel secondo capitolo mi occuperò dei sistemi in dimensione maggiore di uno. Una delle principali differenze rispetto ai sistemi uni-dimensionali, è la possibilità di avere contemporaneamente espansioni e contrazioni, fatto che porta ad una maggiore ricchezza delle dinamiche che possono manifestarsi. I concetti e gli strumenti di base, presentati nel primo capitolo, verranno estesi ed adattati alle nuove necessità e al tempo stesso, se ne renderanno necessari di nuovi per lo studio delle situazioni maggiormente complesse che si presenteranno.

Inizierò l'analisi considerando mappe lineari di $\mathbf{R}^2$ che consentono facilmente di evidenziare le direzioni di espansione e quelle di contrazione indotte dalle mappe sul piano, per poi estendere tali risultati a generiche mappe di $\mathbf{R}^2$.

Per chiarire alcuni aspetti dei nuovi fenomeni dinamici che è possibile incontrare in dimensione maggiore di uno utilizzeremo, come nel I capitolo, dei modelli.

Il "ferro di cavallo" di Smale fu il primo esempio di diffeomorfismo che possiede infiniti punti periodici e che risulta essere strutturalmente stabile. Si tratta di una mappa fondamentale, che evidenzia meccanismi di "stiramento", "contrazione" e "ripiegamento" che si ripresentano spesso in altre mappe che sviluppano dinamiche caotiche.

Come per la mappa logistica anche in questo caso utilizzeremo gli strumenti della dinamica simbolica, con qualche piccola modifica, per evidenziare l'evoluzione delle mappe nell'insieme invariante in cui essa è interessante.

Successivamente con gli "automorfismi iperbolici del toro" e con alcuni esempi di attrattori caotici introdurrò nuovi strumenti di analisi e porrò l'attenzione su quei fenomeni che non potevano verificarsi in dimensione uno.

Al concetto di attrattore ho già accennato in precedenza. Nel paragrafo loro dedicato

cercherò di evidenziare la loro importanza nella definizione del comportamento asintotico di un sistema dinamico. Purtroppo del concetto di attrattore non esiste una definizione univoca (come per il caos, del resto) e sarà interessante vedere in cosa tali definizioni sono simili e in cosa si differenziano, e perché.
La definizione di “attrattore strano” (o attrattore caotico) porta a domandarsi “quale” e “quanta” parte del piano appartenga a tale regione invariante e quale no. Per rispondere a questa domanda tratteremo della dimensione degli attrattori caotici, primo livello di conoscenza necessario a caratterizzarne le proprietà.
Riprenderò poi il concetto di biforcazione.
Anche sotto questo aspetto i sistemi dinamici in dimensione maggiore di uno evidenziano una più ampia varietà di comportamenti possibili. Nuove tipologie di biforcazione si manifestano sia a livello locale che (soprattutto) a livello globale. Cercherò di evidenziare i vari “percorsi” evolutivi attraverso i quali un sistema dinamico può manifestare improvvisi cambiamenti nella struttura dei suoi punti periodici o, a livello globale, nella struttura dei bacini di attrazione. Ritornerà nuovamente il concetto di orbita omo- ed eteroclinica che, come vedremo, svolge un ruolo fondamentale in alcuni tipi di biforcazione. Inoltre cercherò di mostrare come alcuni di questi percorsi evolutivi possono portare, attraverso una successione di biforcazioni, verso un comportamento di tipo caotico e, al tempo stesso, come tali attrattori caotici possano subire attraverso questi meccanismi, dei cambiamenti repentini nella loro struttura.
Infine mostrerò come il concetto di punto critico possa essere generalizzato in quello di “linea critica”. Tali regioni dello spazio hanno, così come i loro “cugini” in una dimensione, un ruolo fondamentale nel delineare gran parte degli aspetti qualitativi della dinamica globale del sistema e dei mutamenti a cui tale dinamica è sottoposta. L’utilizzo di tale strumento per la determinazione di certe biforcazioni globali e per la delimitazione degli attrattori caotici sarà poi uno dei punti fondamentali dello studio condotto nel capitolo 3.
In esso prenderò in considerazione un modello dinamico discreto del mercato azionario. Questo si basa su di un modello in tempo continuo presentato da Antoci e Gay nel 1989. In tale modello si mettono in relazione l’indice dei prezzi, p, dei titoli azionari e lo stock netto di risparmio, s, complessivamente raccolto dai fondi di investimento. Le ipotesi sono :

1. che la variazione dei prezzi dipenda direttamente dal livello che l’indice p ha già raggiunto e dal volume dei capitali che i fondi detengono complessivamente ;
2. che i risparmiatori siano sensibili oltre alle due grandezze già enunciate anche al “trend” $\dot{p}$ dei prezzi azionari.

Lo schema da loro ideato è particolarmente originale soprattutto per il meccanismo dei mercati mobiliari che si propone di indagare, ma trova forti limitazioni nel linguaggio formale adottato, quello dei sistemi dinamici in tempo continuo, che riduce fortemente l’insieme dei comportamenti asintotici che è possibile attendersi.
Per porre rimedio a tale limitazione Gori e Rinaldi (1989) hanno trasferito il modello nel

discreto. Mantenendo inalterate le ipotesi di funzionamento, sia pur prendendo in considerazione alternative diverse, si giunge ad ottenere la mappa cubica definita su tutto $\mathbf{R}^2$

$$\begin{cases} x_1 = (1+ec)x - ay - bx^3 - edy^3 \\ y_1 = cx + y - dy^3 \end{cases}$$

Dove i parametri devono soddisfare le condizioni

$$a, b, c, d > 0 \qquad e \qquad a + e > 0$$

L'analisi delle dinamiche di tale modello verrà condotta in due tempi.
Prima procederò all'analisi locale del punto di equilibrio presente nell'origine. Per fare ciò utilizzerò gli strumenti analitici descritti nei paragrafi relativi alla stabilità locale e alle biforcazioni. In seguito condurrò un'analisi di tipo globale basandola principalmente sull'utilizzo delle linee critiche per individuare i punti di biforcazione che modificano la struttura dell'attrattore e del suo bacino di attrazione. In questo mi aiuterò con una simulazione numerica al calcolatore.
Vedremo che per valori di e molto bassi, che dal punto di vista dell'interpretazione economica significa scarsa vocazione speculativa dei risparmiatori, il sistema presenta un'orbita attrattiva invariante di forma regolare con ampio bacino di attrazione. Questo significa che il sistema ha una dinamica facilmente predicibile e al tempo stesso un'ottima capacità di riassorbire automaticamente gli eventuali shock esogeni che perturbino momentaneamente il mercato.
Vedremo poi che con l'aumentare della propensione speculativa dei risparmiatori la situazione tenderà progressivamente a peggiorare. La regione attrattiva invariante comincerà ad ingrandirsi e a sviluppare orbite caotiche e, al tempo stesso, il suo bacino di attrazione tenderà ad avvicinarglisi sempre più fino a collassarvi. A quel punto il mercato non possiede più quei meccanismi di autoregolazione che tendevano a far oscillare i valori di s e di p intorno all'equilibrio. Le traiettorie si allontaneranno sempre più dall'equilibrio e soltanto un intervento riequilibratore esterno potrà riportarvele.