

3. UN MODELLO DINAMICO DISCRETO DEL MERCATO AZIONARIO

3.1 INTRODUZIONE.

L'introduzione, nel mercato azionario italiano, dei fondi comuni di investimento, ha posto numerosi interrogativi intorno all'impatto strutturale che poteva essere prodotto sulla dinamica della nostra borsa dalla comparsa di una nuova classe di operatori istituzionali. In questo ambito, a fronte di una vasta letteratura tecnica, non sono numerosi i contributi di carattere teorico. Ed in particolare, risultano assenti modelli deterministici tesi a studiare le fluttuazioni endogene generate, sui mercati mobiliari, da iniziative antagoniste dei diversi soggetti economici.

Una interessante eccezione è costituita dalla ricerca condotta da A. Antoci ed A. Gay (1989) sulle interazioni esistenti tra livello dei prezzi di borsa e volume della raccolta netta dei fondi azionari di investimento.

La modellistica tesa a descrivere l'evoluzione nel tempo di uno "stock exchange" è, naturalmente, molto vasta. Ci limitiamo a ricordare l'analisi classica proposta in un contesto stocastico da P. A. Samuelson (1965) e i due articoli di E. Zeeman (1974) e R. H. Day (1988) che si riferiscono, invece, ad una descrizione del processo di formazione dei prezzi la cui natura si ammette essere deterministica. Osserviamo, in proposito, come l'erraticità dei corsi azionari abbia potuto trovare rappresentazione in sistemi formali da cui sono assenti grandezze aleatorie solo a partire dalla relativa maturità che, negli ultimi venti anni, è stata raggiunta dalla Teoria delle Singolarità per le trasformazioni differenziabili e dalle tecniche di analisi qualitativa applicabili a modelli non-lineari; e, più esattamente, la Teoria delle Catastrofi nel caso del contributo di Zeeman, e la caratterizzazione di morfologie complesse relative alla iterazione delle mappe unidimensionali, per il più recente lavoro di Day.

3.1.1 Il modello in "tempo continuo".

L'originalità dello schema di Antoci e Gay consiste, soprattutto, nella scelta del particolare meccanismo interno ai mercati mobiliari che si è voluto indagare, ma trova, secondo Gori e Rinaldi, un suo limite nel linguaggio formale adottato, quello dei sistemi dinamici in tempo continuo nel piano, linguaggio che restringe a priori (in base al Teorema di Poincaré-Bendixson ed i suoi corollari), la classe dei comportamenti asintotici che dal modello proposto è possibile attendersi.

Utilizzando il simbolo p per rappresentare l'indice dei prezzi dei titoli azionari, ed il simbolo s per lo stock netto di risparmio complessivamente raccolto dai fondi, il moto del sistema, il cui spazio delle fasi bi-dimensionale coincide con l'ortante positivo del piano (s,p) , si suppone essere descritto dal campo vettoriale

$$(A) \quad \begin{cases} \dot{s} = f(s, p, \dot{p}) = f(s, p, g(s, p)) \\ \dot{p} = g(s, p) \end{cases}$$

le cui equazioni traducono, rispettivamente le ipotesi:

1. di una dipendenza diretta della variazione dei prezzi sul mercato dal livello che l'indice p ha già raggiunto e dal volume dei capitali che i fondi, complessivamente, detengono;
2. di una certa sensibilità dei risparmiatori che scelgono i fondi come intermediari delle loro operazioni in borsa, oltre che per le due grandezze precedenti, anche per il "trend", \dot{p} , che i prezzi azionari denunciano.

È sufficientemente naturale ammettere, che le funzioni f e g del sistema soddisfino, a parte quella di essere almeno di classe C^1 , le condizioni del primo ordine seguenti:

$$\frac{\partial f}{\partial s} < 0 \quad \text{diversificazione degli investimenti;}$$

$$\frac{\partial f}{\partial p} < 0 \quad \text{propensione a monetizzare i capitali investiti in presenza di buone performance del mercato;}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{p}} > 0 \quad \text{aspettative adattabili: vocazione "speculativa" dei risparmiatori;}$$

$$\frac{\partial g}{\partial s} > 0 \quad \text{ruolo svolto dai fondi nel sostenere la domanda;}$$

$$\frac{\partial g}{\partial p} < 0 \quad \text{prevalere dell'offerta in mercati i cui prezzi sono remunerativi.}$$

Si verifica facilmente che le cinque ipotesi ora introdotte sono sufficienti a garantire l'unicità della configurazione di equilibrio se questo esiste.

Gli autori ammettono che il campo (\dot{s}, \dot{p}) presenti un tale punto singolare, quindi, con un opportuno cambiamento differenziabile di variabili.

$$(s, p) \rightarrow (S, P)$$

che trasforma l'ortante positivo di \mathbf{R}^2 nell'intero piano (S, P) e trasporta il punto fisso nell'origine, riscrivono il sistema e conducono l'analisi del flusso su di una sua approssimazione polinomiale di 3° grado che si suppone possa essere scritta come

$$(A') \quad \begin{cases} \dot{S} = -aP + e\dot{P} - bS^3 \\ \dot{P} = cS - dP^3 \end{cases}$$

dove i parametri a, b, c, d, e , sono tutti reali e positivi.

In particolare b e d , coefficienti dei termini “stabilizzanti” $-S^3$ e $-P^3$, misurano la forza con cui il sistema tende a riavvicinare l’equilibrio una volta che se ne sia sufficientemente allontanato, mentre il coefficiente e di \dot{P} può essere interpretato come indice delle reattività dei risparmiatori alle variazioni di prezzo, e quindi, può essere positivamente correlato alla velocità di aggiustamento dalle loro aspettative, assumendo così il ruolo di “indice della natura più o meno speculativa del mercato”.

Dal punto di vista dell’analisi qualitativa quest’ultimo sistema rientra nella grande famiglia dei sistemi polinomiali autonomi nel piano per i quali esiste una ricchissima letteratura, tra cui i lavori di A. A. Andronov (1949 e 1973) e la monografia di Ye Yian Qian (1986).

Come si è detto le dinamiche a cui il modello, in questa forma, può dare luogo sono limitate dal fatto che l’ α - e l’ ω -insieme limite di un qualunque suo punto, se sono limitati, devono consistere: (a) di una orbita periodica (genericamente in punto fisso o un ciclo limite), o (b) di un “oggetto” geometrico composto di equilibri e di traiettorie, ciascuna delle quali congiunge due equilibri non necessariamente distinti.

Nel caso in esame la situazione (b) è facilmente esclusa essendo l’origine un repulsore (un fuoco se $(ec)^2 - 4ac < 0$ un nodo se $(ec)^2 - 4ac \geq 0$).

Il problema della classificazione topologica del flusso di tale sistema è, dunque, genericamente ricondotto a quello di contare il numero dei cicli limite che circondano l’unico equilibrio esistente.

Il metodo utilizzato dagli autori è quello dei “campi vettoriali ruotati”; la loro dimostrazione tuttavia è incompleta, e l’esistenza di un solo ciclo limite stabile intorno all’origine e quindi l’affermazione della unicità e della osservabilità del comportamento periodico inerente, “a regime”, le variabili di stato (S, P) resta una congettura.

Successivamente M. Galeotti (1989) ha provato che il suddetto sistema può ammettere al più 3 orbite chiuse e M. Poli (1989) ha risolto completamente, ed in modo positivo il problema.

3.1.2 La “discretizzazione” del tempo.

Il modello di seguito analizzato è stato per la prima volta preso in esame da Gori e Rinaldi. Si tratta di una versione in tempo discreto dello schema precedente, che finisce così per assumere, come vedremo, la forma di una mappa polinomiale di \mathbf{R}^2 in sé.

Vale la pena di osservare che la diversità delle morfologie dinamiche alternativamente esibite da uno stesso modello, a seconda che questo sia formulato assegnando al tempo

il carattere di una grandezza continua o di una grandezza discreta, costituisce uno degli aspetti più interessanti della diffusione che ha avuto, nel campo delle discipline non-fisiche, la Teoria dei Sistemi Dinamici Complessi. La rilevanza, per le applicazioni, dei risultati numerici e formali da questa forniti, è stata messa in risalto da vari autori (si ricorda, tra molti altri, il celebre articolo di R. M. May (1976) ed, in campo economico, il contributo di R. A. Dana e P. Malgrange (1984)), ed ha offerto una dimensione nuova al tradizionale confronto, tra ricercatori attivi nel campo delle scienze sociali, intorno alla corretta natura, continua o discreta, del “tempo economico”.

Nel caso del modello che stiamo prendendo in considerazione, la maggiore rilevanza empirica di un’ipotesi “discreta” sul tempo può essere giustificata sulla base di tre osservazioni principali:

1. La natura del mercato azionario e dei meccanismi che presiedono, istante per istante, alla formazione dei prezzi, sembra suggerire una descrizione dinamica in tempo discreto sia quando l’unità di misura relativa viene identificata con l’intervallo che separa la compilazione di due successivi listini, “giorno”, sia quando tale unità di misura viene pensata come il “tempo minimo” richiesto ad un computer per elaborare due blocchi di informazioni successive.

2. Ogni argomentazione in favore del “continuo” è fondata sull’ipotesi di casualità degli accessi dei diversi agenti al mercato e, in particolare, sulla natura casuale non solo degli istanti in cui questi assumono le loro decisioni ma anche, e soprattutto, dei “tempi” in cui tali decisioni finiscono per acquisire un rilievo economico.

3. L’estrema varietà di morfologie che le serie storiche dei corsi azionari presentano può trovare rappresentazione, in un modello bi-dimensionale, solo nel caso di dinamiche discrete, data la relativa semplicità dei comportamenti asintotici che, come si è ricordato, la Teoria dei Sistemi Dinamici impone a processi generati da campi vettoriali definiti nel piano.

In ogni caso, la traduzione in veste discreta di un modello originariamente formulato in tempo continuo non può essere considerata una operazione automatica, riducibile da un punto di vista analitico al sostituire, per ogni variabile $x(t)$, al rapporto \dot{x} dei due infinitesimi dx/dt , quello dei corrispondenti accrescimenti finiti Δt unitari ed a scrivere, dunque, al posto della grandezza $\dot{x}(t_0)$ la sua variazione discreta: $x(t_0 + 1) - x(t_0)$.

Già nel caso della più semplice legge non lineare del moto che possa pensarsi assegnata su di una retta, l’equazione differenziale che la rappresenta:

$$\dot{x} = \alpha x + \beta x^2$$

dà luogo con la tecnica appena descritta, all’equazione alle differenze:

$$x(n + 1) = (\alpha + 1)x(n) + \beta x^2(n)$$

Quest'ultima, una versione particolare della mappa logistica, presenta, per valori opportuni dei parametri, dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali e una dinamica caotica; laddove il modello in tempo continuo poteva esibire soltanto fenomeni elementari di convergenza e di divergenza delle traiettorie dagli equilibri.

L'esempio unidimensionale precedente mette bene a fuoco le problematiche che sono connesse alla non invarianza del comportamento dinamico di un sistema rispetto alla trasformazione:

$$(T) \quad \dot{x}(t_0) = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_0} \quad \longrightarrow \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} \Big|_{t_0} = x(t_0 + 1) - x(t_0)$$

che muta la natura della variabile tempo da continua a discreta; e sottolinea la necessità di motivare la scelta del linguaggio formale con cui si intende descrivere un determinato fenomeno reale, a partire dall'evidenza sperimentale che di questo ci è data.

3.2 IL MODELLO.

L'unità di misura del tempo, nel modello discreto di mercato azionario che adesso introdurremo a partire dallo schema di Antoci e Gay, è il "giorno".

Tale ipotesi, che consente una descrizione plausibile dei meccanismi che regolano la formazione dell'indice dei prezzi, p , e del volume netto dei capitali raccolto dai fondi, s , non è tuttavia essenziale; e sarà sempre possibile, con poche o nessuna modifica, fare riferimento a scansioni temporali discrete di ampiezza minore, ivi compresi, eventualmente, i "mini-intervalli" elementari che separano, su di un computer a cui i diversi operatori abbiano accesso, la elaborazione e la trasmissione di due unità di informazione successive.

Sul mercato interagiscono due classi diverse di soggetti economici: i "dealers" che sono ammessi direttamente alla contrattazione dei titoli e partecipano alla determinazione dei prezzi, ed i "risparmiatori", che intendono investire in borsa, ed essendo scarsamente informati dei suoi meccanismi preferiscono sottoscrivere quote dei fondi azionari. Osserviamo che in questo schema i gestori dei fondi di investimento e quei risparmiatori che hanno direttamente in portafoglio titoli azionari fanno entrambi parte della categoria dei dealers.

La struttura del modello dipende fortemente dal fatto che le due classi di soggetti economici presenti sul sistema afferiscono a due mercati distinti; ed il processo dinamico che regola l'evoluzione delle variabili di stato (s , p) riflette una tale

“segmentazione”.

Ammetteremo, infatti, che all'interno dello stesso intervallo temporale unitario le attività proprie di ciascuna categoria di operatori non si svolgano parallelamente ma in “serie”, secondo lo schema seguente:

1. alla data $n+1$ si apre il mercato azionario alle cui contrattazioni partecipano esclusivamente i dealers. Questi conoscono il livello dei prezzi, p_n , ed il valore della raccolta netta dei fondi, s_n , cui hanno dato luogo le iniziative dei diversi agenti nel corso della giornata precedente. Il mercato chiude con la determinazione del nuovo valore dell'indice p_{n+1} , che è legato alle grandezze p_n e s_n da una relazione del tipo:

$$1) \quad p_{n+1} - p_n = g(s_n, p_n)$$

2. Solo successivamente alla chiusura del mercato azionario, i risparmiatori che operano sottoscrivendo quote dei fondi di investimento o chiedendo il rimborso di quelle già detenute, assumono iniziative economiche di “acquisto” o di “vendita”. Tali scelte, condotte a partire dalla conoscenza degli indici p_n , p_{n+1} , e del volume s_n , consentono di individuare il nuovo valore della variabile s , che si suppone dipendere dalle grandezze precedenti in base ad una legge del tipo:

$$2) \quad s_{n+1} - s_n = f(s_n, p_{n+1}, p_{n+1} - p_n)$$

Questa struttura “bi-periodale” del modello è assai meno artificiosa di quanto non possa apparire. Non solo va ricollegata, infatti, alla natura istituzionalmente diversa delle operazioni finanziarie effettuate da ciascuna singola classe di agenti, ma presenta anche riscontri precisi nella legislazione che presiede al funzionamento dei mercati mobiliari in alcuni paesi

Le funzioni g ed f che compaiono nelle due equazioni sopra riportate, in cui consiste il modello, si suppongono di classe C^1 e tali da soddisfare condizioni del primo ordine analoghe a quelle formulate da Antoci e Gay nel loro lavoro.

Ammetteremo dunque che valgano le disuguaglianze:

$$3) \quad \frac{\partial g}{\partial s_n} > 0 \quad \frac{\partial g}{\partial p_n} < 0$$

$$4) \quad \frac{\partial f}{\partial s_n} < 0 \quad \frac{\partial f}{\partial p_{n+1}} < 0 \quad \frac{\partial f}{\partial (p_{n+1} - p_n)} > 0$$

la cui interpretazione economica è immediata, grazie a quanto si è già detto nel discutere

lo schema in tempo continuo originale.

È immediato verificare che la trasformazione

$$(s_n, p_n) \rightarrow (g(s_n, p_n), f(s_n, p_n + g(s_n, p_n), g(s_n, p_n)))$$

definita nell'ortante positivo di \mathbf{R}^2 è in base alle suddette disuguaglianze, che ne rendono il determinante Jacobiano sempre maggiore di zero, un diffeomorfismo. Quindi esisterà, al massimo, una sola coppia (\bar{s}, \bar{p}) che risulta associata a $(0, 0)$ da tale trasformazione. Ne consegue che il sistema dinamico:

$$5) \quad \begin{cases} s_{n+1} - s_n = f(s_n, p_{n+1}, p_n) \\ p_{n+1} - p_n = g(s_n, p_n) \end{cases}$$

ammette, al più, un unico punto di equilibrio.

Gori e Rinaldi affrontano il problema dell'esistenza di una tale configurazione singolare, e della corrispondente necessità di introdurre, nello schema precedente, una qualche ipotesi "ad hoc", cercando di approfondire ulteriormente la consistenza economica del modello.

È naturale pensare, infatti, che il meccanismo da loro preposto alle interazioni esistenti tra livello dei prezzi azionari e volume dei capitali raccolto dai fondi, faccia parte di un più generale processo che regola, nel sistema a cui quegli stessi mercati mobiliari afferiscono, la dinamica di ogni altra grandezza economica, monetaria e reale.

Si fa riferimento alle precedenti equazioni come equazioni di un modello parziale in cui, nello scegliere tra iniziative diverse, gli agenti hanno presenti i valori di alcuni parametri significativi determinati dalla soluzione di opportune sezioni indipendenti dallo schema complessivo, e che si presentano a loro come esogenamente dati.

In questo caso tali valori potranno ridursi, ad esempio, ai livelli "naturali", \bar{s}, \bar{p} , che alla quota di risparmio detenuta dai fondi ed all'indice dei prezzi azionari possono essere associati in base al più generale contesto macroeconomico in cui il mercato azionario e quello dei fondi "vivono".

Indipendentemente dal meccanismo che concorre alla determinazione dei valori \bar{s}, \bar{p} , a cui contribuirà un intero spettro di variabili macroeconomiche, ammetteremo che tali valori, in un ottica analoga a quella delle "aspettative razionali", siano correttamente percepiti dagli operatori oggetto dell'analisi e che il sistema delle suddette equazioni vada quindi riscritto nella forma:

$$5') \quad \begin{cases} s_{n+1} - s_n = F(s_n - \bar{s}, p_{n+1} - \bar{p}, p_{n+1} - p_n) \\ p_{n+1} - p_n = G(s_n - \bar{s}, p_n - \bar{p}) \end{cases}$$

in cui la dinamica dipende, piuttosto che dai valori assunti dalle grandezze s_n e p_n , dai loro scostamenti dai livelli di equilibrio macroeconomico \bar{s} e \bar{p} .

Le funzioni F e G soddisfano le stesse condizioni del primo ordine definite per la f e la g , ma diviene naturale, in questo contesto, chiedere che valga la:

$$6) \quad G(0, 0) = F(0, 0, 0) = 0$$

ovvero che il sistema riscritto possenga un unico equilibrio, e che questo corrisponda alla coppia (\bar{s}, \bar{p}) .

È opportuno osservare che l'equilibrio macroeconomico esogeno (\bar{s}, \bar{p}) deve essere pensato come un "equilibrio dinamico", e cioè dipendente dal tempo. Il fatto che tale dipendenza sia trascurata nel seguito, e che il sistema riscritto venga trattato come autonomo, va riferito ad una ulteriore specificazione del modello.

Si distinguono implicitamente, infatti, due diversi processi dinamici:

1. un processo "veloce", a breve, che si svolge sui mercati mobiliari, in cui le grandezze \bar{s} e \bar{p} si considerano costanti;

2. un processo "lento", a lungo, che riguarda l'evoluzione macroeconomica complessiva, non è influenzato dai movimenti di s e p nel breve periodo, e ridefinisce nel tempo, insieme con le altre variabili, i valori di \bar{s} e \bar{p} .

Le equazioni riscritte, che con il cambiamento di variabili,

$$S_n = s_n - \bar{s}, \quad P_n = p_n - \bar{p}$$

danno luogo alle:

$$5'') \quad \begin{cases} S_{n+1} - S_n = F(S_n, P_{n+1}, P_{n+1} - P_n) \\ P_{n+1} - P_n = G(S_n, P_n) \end{cases}$$

il cui unico equilibrio è nell'origine, sono troppo generali perché se ne possa tentare una lettura analitica.

Seguendo ancora l'impostazione di Antoci e Gay supporremo di poter scrivere la F e la

G in forma polinomiale introducendo in ciascuna, accanto ai termini lineari, una componente stabilizzante del terzo ordine.

Porremo dunque:

$$7) \quad \begin{cases} S_{n+1} - S_n = -AP_{n+1} - BS_n^3 + E(P_{n+1} - P_n) \\ P_{n+1} - P_n = CS_n - DP_n^3 \end{cases}$$

dove tutti i coefficienti A, B, C, D, E sono numeri reali e positivi.

La prima delle due equazioni può essere letta dicendo che “vicino all’equilibrio” la dinamica di s_n è influenzata positivamente dal “trend” esibito dall’indice dei prezzi, e negativamente dagli scostamenti di tale indice dal valore \bar{p} . Questa dinamica dipende solo marginalmente dalla differenza $s_n - \bar{s}$, il cui ruolo nel trascinamento del sistema verso l’equilibrio è invece essenziale quando il suo modulo è sufficientemente grande.

In modo analogo, grazie alla seconda equazione, il movimento dei prezzi in prossimità dell’equilibrio appare particolarmente sensibile agli scostamenti di s_n da \bar{s} , mentre la differenza P_n ha rilievo, nel ricondurre l’indice p_n verso \bar{p} , solo per valori di P_n lontani dall’origine.

È facile comprendere da queste prime osservazioni come il flusso generato dalla mappa (5”) per valori di S e P vicini all’equilibrio, e cioè là dove l’approssimazione polinomiale (7) appare essere maggiormente significativa, presenti una struttura topologica che dipende in maniera essenziale dal prevalere dell’uno o dell’altro dei due parametri positivi A ed E, o meglio, dal prevalere dell’uno o dell’altro degli effetti, sul movimento di S, che questi parametri governano.

Con alcuni passaggi l’ultimo sistema si trasforma in :

$$7') \quad \begin{cases} S_{n+1} - S_n = -AP_n + C(E - A)S_n - BS_n^3 - D(E - A)P_n^3 \\ P_{n+1} - P_n = CS_n - DP_n^3 \end{cases}$$

da cui si ottiene la mappa definita su tutto \mathbf{R}^2 :

$$8) \quad \begin{cases} x_1 = (1 + ec)x - ay - bx^3 - edy^3 \\ y_1 = cx + y - dy^3 \end{cases}$$

dove:

$$x_1 = S_{n+1}, \quad y_1 = P_{n+1}, \quad x = S_n, \quad y = P_n$$

$$a = A, \quad b = B, \quad c = C, \quad d = D$$

e

$$9) \quad e = E - A$$

è l'unico dei cinque parametri reali che può assumere valori sia positivi che negativi.

L'analisi formale del sistema dinamico discreto definita dalle (8) sarà condotta, per valori b, c, d assegnati, nel sottoinsieme

$$M = \{(e, a) \in \mathbf{R}^2 \mid a > 0, e + a > 0\}$$

in cui l'ortante positivo dello spazio (E,A) è trasformato mediante la (9).

È in M, come abbiamo già detto, che hanno luogo le biforcazioni economicamente più rilevanti: connesse al peso relativo che assumono, nelle decisioni dei risparmiatori, le forze antagoniste della loro propensione a monetizzare i "capital gain" realizzati, che è misurata da A, e dalla loro vocazione puramente "speculativa", che cresce invece con E.

Possiamo fare ancora alcune osservazioni che riguardano la struttura del modello e le sue possibili estensioni proposte da Gori e Rinaldi.

1. il sistema (8) è formalmente identico a quello che si ottiene applicando al campo vettoriale di Antoci e Gay la "trasformazione" (T) descritta in precedenza. L'unica differenza riguarda il segno dei parametri che in (8) compaiono, e, più esattamente, il segno di e. Mentre nel nostro caso, e può variare sulla intera retta reale purché risulti $e+a>0$ nel modello ottenuto "cambiando la natura del tempo" a partire dalle equazioni (A'), i valori assunti dal coefficiente e non possono mai essere negativi.

2. le (8) sono state ricavate a partire da una descrizione del mercato azionario e del mercato dei fondi di investimento che assumeva come unità di misura discreta della variabile temporale il "giorno" ma la struttura del modello fa sì che i risultati restino inalterati anche quando si adottano scansioni temporali discrete di ampiezza minore.

3. una diversa versione del modello, in cui non si richiede la organizzazione in serie dei mercati descritta più sopra, si ottiene sostituendo all'equazione (2) la

$$2') \quad s_{n+1} - s_n = f(s_n, p_n, \bar{p}_{n+1} - p_n)$$

che va interpretata nel modo seguente: al tempo n i risparmiatori assumono le loro decisioni di vendita o di acquisto sulla base delle grandezze note s_n, p_n , e del valore atteso \bar{p}_{n+1} dell'indice dei prezzi alla data successiva. Ancora una volta l'ipotesi di

aspettative razionali consente di riscrivere la (2') mediante la:

$$2'') \quad s_{n+1} - s_n = f(s_n, p_n, p_{n+1} - p_n)$$

Il sistema formato dalle (1) e dalla (2''), nell'ipotesi che l'unico equilibrio sia in (\bar{s}, \bar{p}) , e che le funzioni f e g possano essere approssimate mediante polinomi di terzo grado analoghi a quelli che compaiono in (7), può essere ricondotto alla forma (8), dove è, tuttavia, $e = E$, ed i parametri possono quindi assumere soltanto valori positivi. In questo caso il modello possiede una struttura analitica totalmente indistinguibile da quella ottenuta "discretizzando" le equazioni di Antoci e Gay.

4. Anche nell'ipotesi, sviluppata sopra, che gli operatori abbiano una corretta percezione dei valori di equilibrio macroeconomico, le (5') potrebbero dar luogo ad un unico punto fisso (s^*, p^*) diverso da (\bar{s}, \bar{p}) . Ciò corrisponde, da un punto di vista formale, ad aggiungere nella (7) e nella (8), a secondo membro, un termine noto. Alternativamente, volendo riscrivere il sistema in modo da mantenere l'equilibrio nell'origine, sarà necessario introdurre le nuove variabili:

$$U = S + (\bar{s} - s^*), \quad V = P + (\bar{p} - p^*)$$

che sostituite ad S e P hanno però il difetto di condurre a forme polinomiali in cui compaiono, oltre a quelli di primo e di terzo, termini di secondo grado in U ed in V .

5. una diversa versione del modello potrebbe contemplare la presenza di "fenomeni locali di trascinamento" sia per quanto riguarda la sottoscrizione di quote dei fondi, sia per quanto riguarda l'indice dei prezzi.

Supponendo che l'equilibrio macroeconomico sia ancora (\bar{s}, \bar{p}) ciò significa ammettere che in un suo intorno opportuno valgono le condizioni:

$$\frac{\partial f}{\partial s_n} > 0 \quad e \quad \frac{\partial g}{\partial p_n} > 0$$

Una struttura di questo tipo si ottiene aggiungendo nella (7), a secondo membro, il termine βS_n alla prima equazione, ed il termine δP_n alla seconda (dove i numeri positivi β e δ vanno pensati come "piccoli" rispetto a B e D).

Si ottiene il sistema:

$$10) \quad \begin{cases} S_{n+1} - S_n = \{-A(1 + \delta) + E\delta\}P_n + \{C(E - A) + \beta\}S_n - BS_n^3 - D(E - A)P_n^3 \\ P_{n+1} - P_n = CS_n + \delta P_n - DP_n^3 \end{cases}$$

che dà luogo alla mappa di \mathbf{R}^2 in \mathbf{R}^2 :

$$11) \quad \begin{cases} x_1 = (1 + ec + \beta)x - (a - e\delta)y - bx^3 - edy^3 \\ y_1 = cx + (1 + \delta)y - dy^3 \end{cases}$$

i cui simboli hanno lo stesso significato di quelli che compaiono nella (8).

Per quanto la prima di queste due equazioni sia “qualitativamente” identica, per valori β e δ piccoli, all’equazione corrispondente del sistema (8), il parametro δ , che compare nel coefficiente della y della seconda equazione, svolge un ruolo essenziale nel modificare le dinamiche ottenute mediante iterazioni successive della trasformazione (11).

3.3 ANALISI LOCALE

Poc’anzi abbiamo visto come l’analisi del comportamento dinamico di un mercato azionario in cui interagiscono livello dei prezzi e raccolta netta dei fondi possa essere ricondotto allo studio della trasformazione polinomiale di \mathbf{R}^2 in sé:

$$8) \quad \begin{cases} x_1 = (1 + ec)x - ay - bx^3 - edy^3 \\ y_1 = cx + y - dy^3 \end{cases}$$

dove a, b, c, d sono parametri positivi ed e varia in \mathbf{R} in modo da soddisfare la

$$e + a > 0$$

Si è già osservato che in questa ipotesi il sistema ammette un unico equilibrio: l’origine.

Notiamo, ancora, che la mappa:

$$(x, y) \xrightarrow{F} (x_1, y_1)$$

è simmetrica rispetto al punto fisso, e che, pertanto, il flusso da questa generato presenta una completa simmetria centrale: all’orbita $O(x_0, y_0)$, corrisponde l’orbita simmetrica, $O(-x_0, -y_0)$.

Linearizzando la (8) e calcolando la matrice Jacobiana in $(0,0) = 0$ si ottiene:

$$DF(0) = \begin{vmatrix} 1 + ec & -a \\ c & 1 \end{vmatrix}$$

lo studio dei cui autovalori, al variare dei parametri a ed e nel sottoinsieme M di \mathbf{R}^2 ,

definito più sopra, consente una prima descrizione del comportamento dal modello (8) in un intorno del suo equilibrio.

Il discriminante Δ del polinomio caratteristico di $DF(0)$ si annulla se e solo se

$$a = \frac{e^2 c}{4}$$

e quindi nei punti della parabola P del piano (e,a) che compare in Figura 3.1. La zona $R(C)$, interna a tale parabola, corrisponde ad autovalori complessi coniugati, mentre nel suo complementare gli autovalori sono reali. La figura 3.1 fornisce il diagramma di biforcazione relativo all'origine del sistema (8) che è studiato, per valori positivi assegnati ai coefficienti b, c, d come una famiglia di mappe dipendenti da due parametri. La classificazione delle morfologie dinamiche corrispondenti è estesa all'intero piano (e, a) e quindi anche alle coppie non economicamente significative che giacciono al di fuori di M .

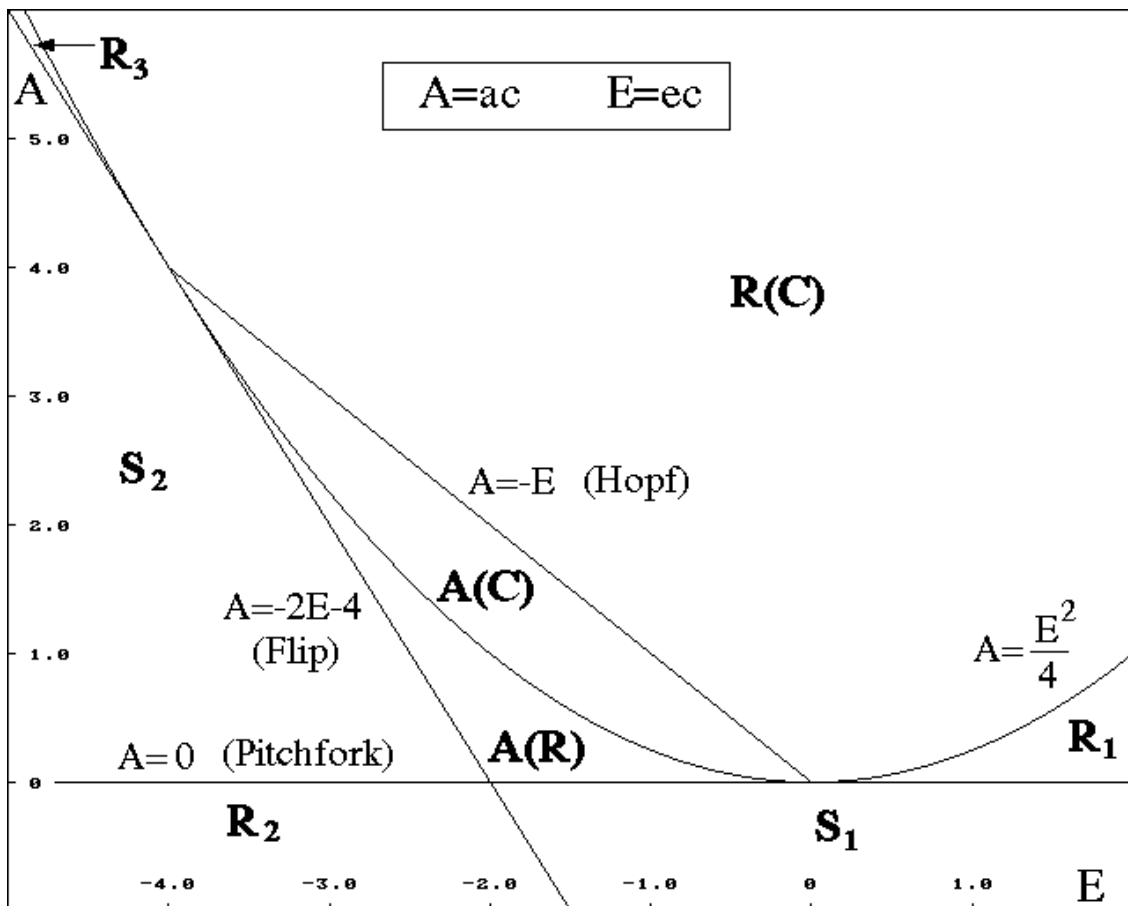


Figura 3.1

L'origine risulta attrattiva nelle due regioni A(R) e A(C) in cui gli autovalori hanno entrambi modulo <1 , si veda per questo la Figura 3.2.

Altrove l'equilibrio è instabile: più esattamente abbiamo una sorgente per valori di e ed a che stanno in $R_1, R_2, R_3, R(C)$, ed una sella per valori di e ed a in S_1 ed S_2 .

A ciascuna delle rette che delimitano queste 8 zone corrisponde un particolare tipo di biforcazione.

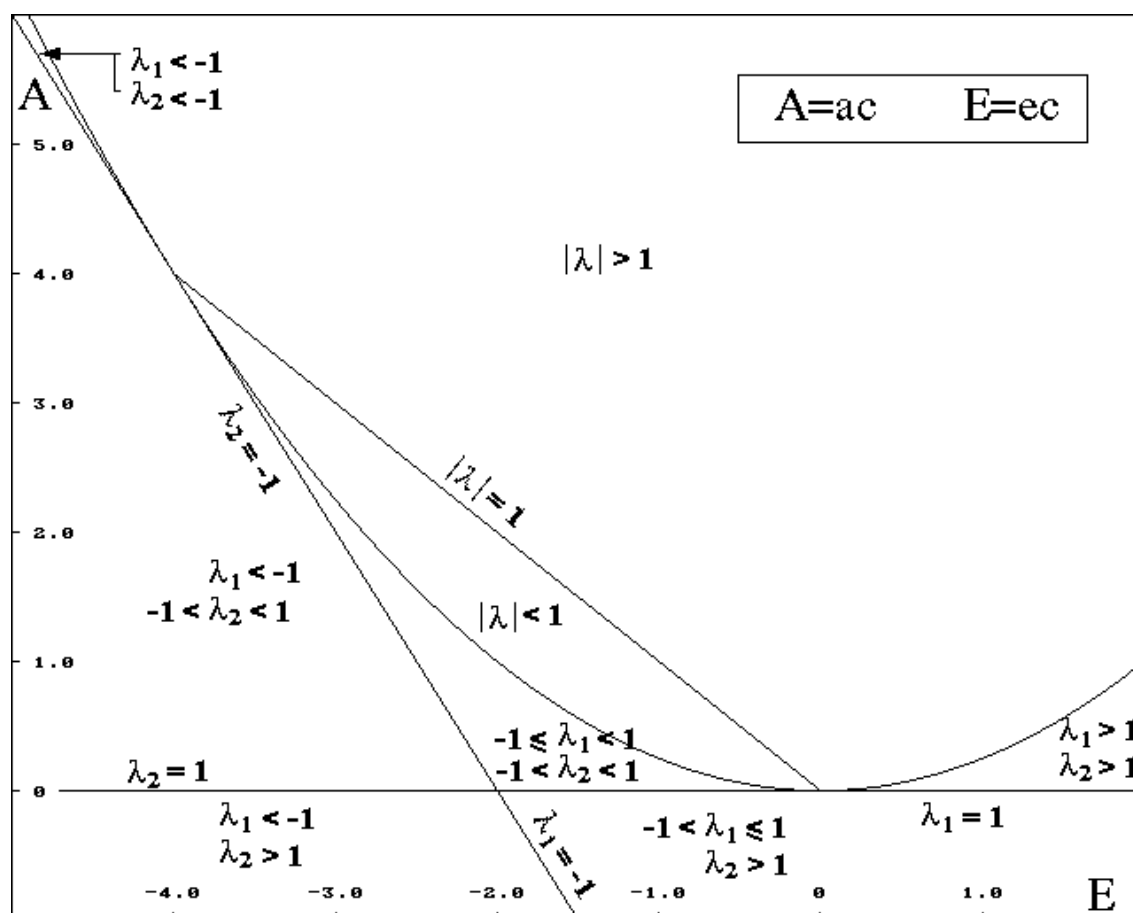


Figura 3.2

Sull'asse $a=0$ si verifica una biforcazione pitchfork, con comparsa, per valori negativi di a , di due nuovi punti fissi, $P_{1-} = (-x_0, -y_0)$ e $P_{1+} = (x_0, y_0)$, che "nascono" dall'origine e sono simmetrici rispetto ad essa. Tale biforcazione è supercritica per $e < -2/c$, subcritica negli altri punti.

Sulla retta r di equazione

$$a = -2e - 4/c$$

uno dei due autovalori reali assume valore -1 e la biforcazione che qui ha origine è del tipo period doubling (vedi ancora la fig. 3.2).

Più interessante, per gli effetti che questa avrà sulla dinamica del sistema al variare di a ed e nel secondo e primo quadrante, nella regione cioè in cui il modello appare economicamente significativo, è il cambio strutturale che si verifica sul segmento h appartenente alla retta di equazione $a = -e$ ed interno alla parabola P , segmento su cui e varia tra $-4/c$ e 0 .

Lungo h infatti, i due autovalori complessi coniugati della DF $(0, 0)$ sono

$$\lambda_0, \bar{\lambda}_0 = \frac{2 + ec \pm i\sqrt{-ec(4 + ec)}}{2}$$

ed appartengono, come si riconosce facilmente, alla circonferenza unitaria.

Essi diventano, in modulo, maggiori di 1 per $a > -e$. L'origine, attrattiva in $A(C)$, diviene così repulsiva in $R(C)$.

Nell'ipotesi che sia: $\lambda_0^n \neq 1$ per $n < 5$, e cioè che risulti $ec \neq -1, -2, -3, -4$, sono verificate le condizioni necessarie affinché abbia luogo una biforcazione di Hopf. Al cambio di stabilità dell'origine resta pertanto associata la comparsa di una curva chiusa ed invariante che la contiene.

Facciamo riferimento al lavoro di Gori e Rinaldi per approfondire alcune caratteristiche di questo tipo di biforcazione, che risulta essere la più importante ai fini del nostro lavoro, dati i vincoli imposti dal segno dei coefficienti che limitano il nostro interesse alla regione $a > -e$

Per stabilire la "natura" supercritica, o subcritica, di tale biforcazione è necessario riscrivere le equazioni (8) in "forma normale", trasformandole, con opportuni cambiamenti di coordinate, in una mappa del tipo

$$9) \quad z_1 = \lambda z + Q z^2 \bar{z} + O(z^4)$$

Posto allora $\lambda_0 = e^{i\alpha}$ e $Q = -qe^{i\gamma}$ consideriamo

$$10) \quad \beta = q \cos(\alpha - \gamma)$$

dal cui segno dipende, appunto, il tipo di biforcazione studiata.

A tale scopo nel caso di un sistema

$$11) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = f(x, y) \\ \dot{y}_1 = g(x, y) \end{cases}$$

analogo al nostro si pone $Y = f(x, y)$ e $X = x$ e si riscrivono le (11) nella forma

$$12) \quad \begin{cases} X_1 = Y \\ Y_1 = AX + BY + \sum_{jk} g_{jk} X^j Y^k \end{cases}$$

dove A, B, ed i g_{jk} , $j + k \geq 2$, sono i coefficienti dello sviluppo di Taylor del cambiamento di variabili.

L'espressione di tali coefficienti in termini delle derivate parziali delle funzioni f e g è piuttosto laboriosa ed è omessa per semplicità.

Per il sistema (8) si ottiene in particolare

$$\begin{cases} X_1 = Y \\ Y_1 = -[1 + c(e + a)]X + (2 + c)Y + \frac{1}{a^3} \{ [-ed((e + a)c + 1)^3 + d(e + a)(1 + ec)^3 + ba^3] X^3 + \\ + 3d[e(1 + c(e + a))^2 - (e + a)(1 + ec)^2] X^2 Y + 3adXY^2 - (ba^3 + ad)Y^3 \} + O^4 \end{cases}$$

Si può verificare che l'espressione del coefficiente Q che compare in (9), calcolata per un sistema del tipo (12), mancante dei termini di secondo grado è la seguente

$$14) \quad Q = \frac{1}{\text{sen}^3 \alpha} [3g_{30} + g_{21}(3\cos\alpha + i\text{sen}\alpha) + 3g_{03}e^{i\alpha} + g_{12}(2 + e^{2i\alpha})]$$

dove i coefficienti dello sviluppo di Taylor sono valutati per i valori di biforcazione dei parametri.

Nel nostro caso si ricava:

$$14') \quad Q = -qe^{i\gamma} = -\frac{3}{8\text{sen}^3 \alpha} \left[b + \frac{2d}{e^2}(1 - \cos\alpha) \right] [\text{sen}\alpha + i(1 - \cos\alpha)]$$

e, quindi, finalmente,

$$q = \frac{3}{8\text{sen}^3 \alpha} \left[b + \frac{2d}{e^2}(1 - \cos\alpha)\sqrt{2(1 - \cos\alpha)} \right]$$

$$15) \quad \begin{cases} \cos\gamma = \frac{1 + \cos\alpha}{\sqrt{2(1 + \cos\alpha)}} = \cos\frac{\alpha}{2} \\ \text{sen}\gamma = \frac{1 - \cos\alpha}{\sqrt{2(1 - \cos\alpha)}} = \text{sen}\frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

da cui

$$\gamma = \frac{\alpha}{2}$$

Sarà pertanto:

$$16) \quad \beta = q \cos(\alpha - \gamma) = -\operatorname{Re} Q(0) e^{i\alpha} = -\frac{3}{2} \frac{1}{ec(4+ec)} \left(b - \frac{cd}{e} \right)$$

coefficiente, quest'ultimo, che risulta sempre positivo su h se c , d e b sono positivi. In queste ipotesi la biforcazione di Hopf è dunque supercritica. Per valori dei parametri nella regione $R(C)$, sufficientemente vicini ad h , le traiettorie dei punti di un opportuno intorno dell'origine si allontanano da questa per tendere asintoticamente ad una curva chiusa e invariante Γ che la circonda. A regime la dinamica del sistema (8), per valori dei parametri a ed e che cadono in $R(C)$ e sono prossimi al segmento h , è indistinguibile da quella dei punti che giacciono su Γ .

La forma e le dimensioni di tale curva, nonché le caratteristiche dinamiche del sistema su di essa variano con a ed e .

Nel caso discreto, come è noto dalla teoria dei fenomeni di risonanza associati ad una biforcazione di Hopf (H. A. Lauwerier, 1986), le dinamiche che il sistema (8) può presentare sulla curva invariante Γ , od in prossimità di questa, sono essenzialmente di due tipi: il "moto" lungo l'attrattore ha natura periodica o, alternativamente, aperiodica. In realtà, esiste un insieme aperto nel piano (e, a) dei parametri, in cui la restrizione $f(\theta)$ di (8) a Γ è caratterizzata da un numero di rotazione irrazionale, e quindi la f , se di classe C^2 , definisce un flusso topologicamente coniugato ad una rotazione irrazionale sul cerchio (in particolare ogni traiettoria su Γ risulta essere densa).

Il complementare di tale aperto è costituito dall'unione di una famiglia numerabile di insiemi chiusi nel piano dei parametri, detti "Lingue di Arnold", dove la dinamica del sistema, ristretto a Γ , è caratterizzato dalla presenza di un'orbita periodica attrattiva di periodo q . In ciascuna di queste regioni del piano (e, a) la $f(\theta)$ ha uno stesso numero di rotazione $p/q \in \mathbb{Q}$, costante.

Tali regioni, che "si dipartono" dall'insieme di biforcazione h , sono simmetriche rispetto ad una ben definita direzione nel piano dei parametri che è detta "asse di Arnold" ed è caratterizzata dalla:

$$17) \quad \phi = \gamma - \alpha \pmod{\pi}$$

Naturalmente all'allontanarsi della coppia (e, a) dei parametri dai valori di biforcazione h , la mappa H , che definisce la restrizione del sistema (8) alla curva Γ , può divenire non invertibile: una tale circostanza prelude in generale, come abbiamo visto, alla transizione del sistema verso comportamenti caotici.

Nel caso di un sistema che, scritto nella forma (12), abbia nulli tutti i coefficienti dei

termini di secondo grado e per cui quindi sia possibile, mediante la (13), ottenere l'espressione del coefficiente Q in funzione dei parametri, non è difficile calcolare tanto la lunghezza del raggio R_H del cerchio invariante Γ che circonda l'equilibrio del sistema quando esso sia scritto in forma normale, quanto la direzione degli assi di Arnold.

A tal fine si ponga

$$18) \quad \lambda = (1 + \mu e^{i\phi}) e^{i\alpha}$$

dove $e^{i\alpha}$ rappresenta il valore assunto da λ su h e $-\pi < \alpha < 0$.

Per il sistema (8) si ottiene

$$\mu^2 = ac + (ec + 2)(1 - \cos\alpha) - \text{sen}\alpha\sqrt{4ac - e^2c^2}$$

$$\cos\phi = \frac{1}{2\nu} \left(2\cos\alpha - 2 + \cos\alpha ec + \text{sen}\alpha\sqrt{4ac - e^2c^2} \right)$$

$$\text{sen}\phi = \frac{1}{2\nu} \left(\cos\alpha\sqrt{4ac - e^2c^2} - \text{sen}\alpha(2 + ec) \right)$$

ed è possibile provare che, per valori di λ in un conveniente intorno di $e^{i\alpha}$, il raggio del cerchio invariante, per il sistema scritto in forma normale, ha l'espressione

$$19) \quad R^2 = \mu \frac{\cos\phi}{\beta}$$

Abbiamo quindi per il nostro sistema:

$$20) \quad R^2 = \frac{1}{2\beta} \left(2\cos\alpha - 2 + \cos\alpha ec - \text{sen}\alpha\sqrt{4ac - e^2c^2} \right)$$

e ciò consente di affermare che le dimensioni della curva invariante Γ diminuiscono al crescere dei parametri b e d .

L'equazione di Γ ha in particolare la forma:

$$x^2 - 2xy \cos\alpha + y^2 = R^2$$

e, sostituendo in questa y con $f(x, y)$, si può ottenere l'espressione analitica della curva chiusa da cui sono attratte le orbite definite dal sistema (8).

Risolvendo, infine, l'equazione $\text{sen}(\alpha - \gamma + \phi) = 0$, si trova che, l'asse di Arnold relativo alla risonanza p/q assume la forma

$$a = \frac{1}{2c(1 + \cos\alpha)} [e^2 c^2 + 4(1 - \cos\alpha)(2 + ec)]$$

dove

$$\alpha = \frac{2\pi p}{q}$$

e costituisce pertanto, nel piano (e, a) , una parabola che interseca la retta $a = -e$ in due punti: l'estremo $e = \frac{-4}{c}$ di h ed il valore di biforcazione $e = \frac{2(\cos\alpha - 1)}{c}$.

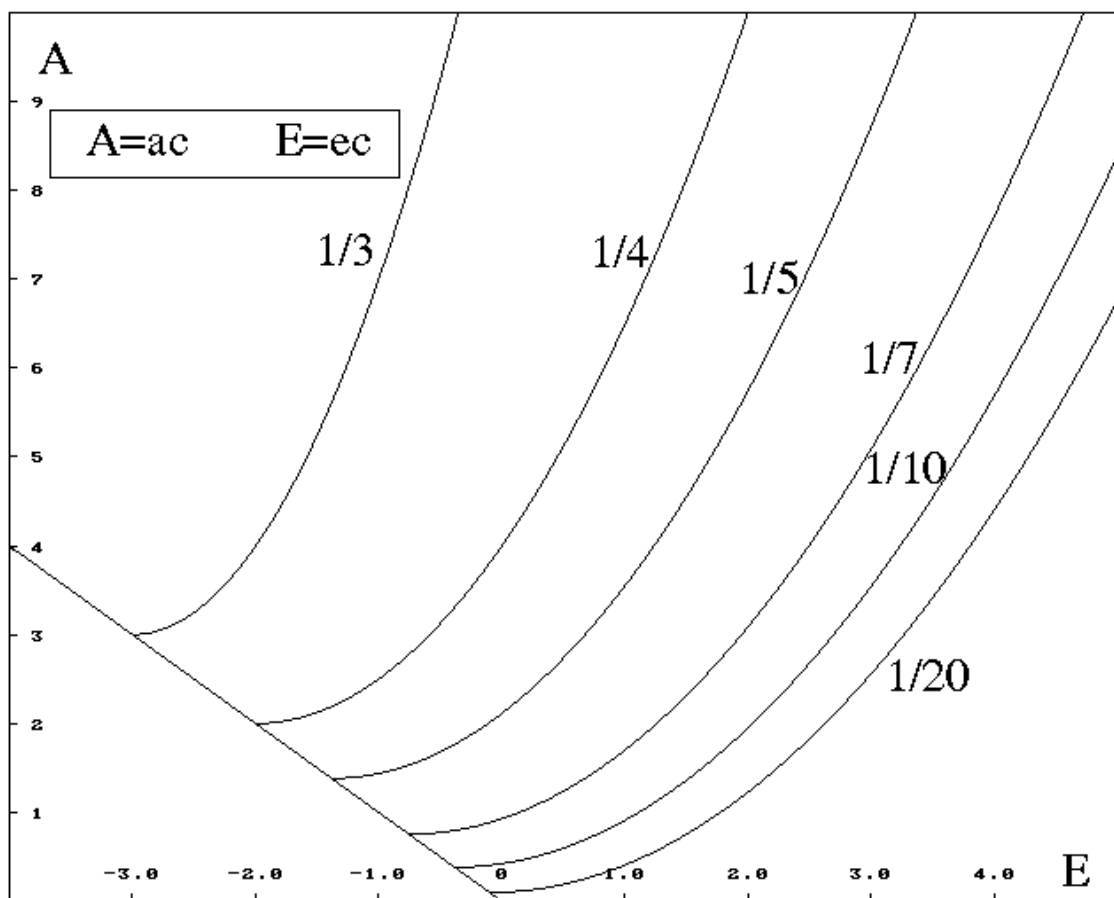


Figura 3.3

Nella figura 3.3 compaiono le parabole corrispondenti agli assi di Arnold relativi alle “risonanze forti” $1/3$ e $1/4$, ed alle “risonanze deboli” $1/5$, $1/7$, $1/10$ e $1/20$.

Come è noto se la restrizione di F a Γ è un omeomorfismo il suo numero di rotazione è unico e quindi le lingue di Arnold non possono intersecarsi.

Questa ipotesi è sicuramente soddisfatta se la curva chiusa è contenuta nella regione in cui $DF(x, y) \neq 0$:

$$x^2 < \frac{[1 + c(e + a)]}{3b}$$

$$y^2 < \frac{[1 + c(e + a)]}{3d}$$

Per valori di (e, a) sufficientemente lontani dall'insieme di biforcazione h , Lingue di Arnold corrispondenti a numeri razionali di rotazione diversi possono tuttavia sovrapporsi, dando luogo a comportamenti dinamici di più difficile descrizione.

3.4 ANALISI GLOBALE

Fino ad ora non ci siamo posti il problema di stabilire se la mappa F abbia un'unica inversa o meno, in quanto tale informazione non è essenziale per eseguire l'analisi dei punti fissi e della loro stabilità locale. Tale informazione diventa invece rilevante per l'analisi dei bacini di attrazione, ed in particolare per lo studio delle biforcazioni globali che avvengono in regime di instabilità dei punti fissi.

Abbiamo già visto che le biforcazioni globali sono deducibili dal comportamento dinamico di particolari insiemi: insiemi invarianti, come le varietà stabili ed instabili dei cicli (che caratterizzano le biforcazioni omocliniche ed eterocliniche), o insiemi non invarianti, come le linee critiche.

In mappe con inversa non unica, caso in cui rientra come vedremo anche la nostra mappa, le linee critiche costituiscono uno strumento molto utile per lo studio delle dinamiche globali. Attraverso l'utilizzo di tale strumento condurremo l'analisi al fine di ottenere informazioni sulle proprietà dinamiche e i comportamenti asintotici del sistema al variare dei parametri nella regione ammissibile.

Affronteremo tre aspetti :

A. Seguiremo l'evoluzione dell'orbita invariante Γ creata dalle biforcazioni di Neimark-Hopf. Appena nata, cioè con valore dei parametri vicini alla retta $a + e = 0$, l'orbita invariante (localmente attrattiva) risulta di forma pressoché circolare e liscia (smooth). Tale orbita cresce di dimensione perdendo man mano la sua semplice forma, attraverso una serie di trasformazioni (ondulazioni, cappi e così via) che porteranno alla creazione di un'area caotica anulare. Abbiamo già studiato questo fenomeno in precedenza. Seguendo il lavoro di Aronson et al. avevamo visto che tale fenomeno è conseguenza di biforcazioni omo- ed eterocliniche e del sovrapporsi di più numeri di rotazione diversi per i punti dell'orbita invariante. Adesso invece vedremo che lo stesso può essere spiegato facendo riferimento all'intersezione fra l'orbita invariante e le linee critiche LC_{-1} (vedi Frouzakis et al., 1996).

B. Studieremo il bacino di attrazione dell'attrattore e le sue biforcazioni globali, che lo trasformano da semplicemente- a molteplicemente-connesso, con la creazione di

“isole”, “penisole” e così via. Tali biforcazioni globali possono essere caratterizzate da contatti fra LC e la frontiera del bacino che in questo caso risulta essere formato dalla varietà stabile di un ciclo-2 di punti di sella, dai punti di sella stessi e da una coppia di nodi repulsivi che compongono un altro ciclo. Tali contatti fra i diversi rami di LC e la frontiera che separa il bacino $\gamma(\Gamma)$ da $\gamma(\infty)$ determinano biforcazioni globali che portano alla formazione di “laghi” di $\gamma(\infty)$ dentro $\gamma(\Gamma)$ o alla riunione di tali laghi con l’“oceano” $\gamma(\infty)$ e così via (vedi Mira et al., 1994).

C. Infine considereremo le trasformate di LC mediante la mappa, cioè le linee critiche di ordine superiore LC_1, LC_2 , le quali, come abbiamo già visto, possono essere utilizzate per delimitare le “aree assorbenti”. Nel nostro caso, le useremo per delimitare con esattezza gli attrattori caotici, come le aree caotiche anulari che caratterizzano la dinamica asintotica per valori dei parametri sufficientemente lontani dalla retta di biforcazione di Neimark-Hopf.

3.4.1 Inverse della mappa

La mappa che stiamo studiando è, come si verifica facilmente, una mappa non invertibile.

Dato $P' = (x', y') \in \mathbf{R}^2$, le sue (eventuali) preimmagini reali di rango 1 si ottengono dalla mappa F esprimendo (x, y) in funzione di (x', y') , ovvero

$$\{(x, y)\} = F^{-1}(x', y')$$

dove l’insieme delle preimmagini può essere vuoto o contenere più di un punto. Nel nostro caso risulta :

$$F \equiv \begin{cases} x' = (1 + ec)x - ay - bx^3 - edy^3 \\ y' = cx + y - dy^3 \end{cases}$$

da cui risolvendo la II rispetto ad x si ha :

$$1. \quad x = \frac{1}{c}(y' - y + dy^3)$$

e sostituendo nella I :

$$2. \quad b(dy^3 - y + y')^3 - c^2(dy^3 - y + y') - c^3e(y' - y) + c^3(ay - x') = 0$$

Si tratta di una equazione algebrica intera di 9° grado in y che può avere, a seconda dei valori (x', y') dati, almeno 1 e fino a 9 soluzioni.

Il numero di preimmagini di un dato punto (x', y') dipende dalla regione del piano in cui si trova. Abbiamo già detto che le regioni aperte costituite da punti che possiedono un dato numero, k , di preimmagini prendono il nome di “zone di molteplicità” e si indicano

con Z_k ; tali regioni sono separate da tratti di $LC = F(LC_{-1})$. In genere ogni tratto di LC separa due regioni Z_k, Z_{k+2} , cioè i cui punti hanno un numero di preimmagini che differisce di 2 unità. Per definizione i punti critici (punti che appartengono a LC) possiedono 2 preimmagini coincidenti che scompaiono muovendosi verso Z_k oppure si separano muovendosi verso Z_{k+2} . Questo fenomeno lo si può facilmente comprendere pensando al fatto che il piano \mathbf{R}^2 viene praticamente piegato su se stesso lungo la LC mediante una applicazione della mappa.

Quindi, schematizzando, se consideriamo la restrizione della mappa ad un intorno di LC , la trasformazione sarà di tipo $2 \rightarrow 1$ da un lato, $1 \rightarrow 1$ sulla LC e $0 \rightarrow 1$ dall'altro, cosicché il numero delle preimmagini dei punti che stanno da una parte oppure dall'altra della LC deve differire di 2. Il numero delle preimmagini che si ottengono per un dato punto del piano sarà deducibile in modo immediato una volta tracciate le curve LC .

Le soluzioni approssimate della (2) possono essere ottenute con una qualunque routine per la ricerca numerica degli zeri di un polinomio.

3.4.2 Linee Critiche

La mappa è differenziabile e quindi possiamo determinare analiticamente la LC_{-1} uguagliando a 0 il determinante della matrice Jacobiana. Risulta :

$$DF(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 1 + ec - 3bx^2 & -a - 3edy^2 \\ c & -3dy^2 \end{pmatrix}$$

da cui ponendo

$$\det DF(x, y) = 0$$

si ottiene

$$9bdx^2y^2 - 3dy^2 - 3bx^2 + c(a + e) + 1 = 0$$

e quindi esplicitando y si ha

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{3d}} \sqrt{1 - \frac{c(a + e)}{3bx^2 - 1}}$$

oppure rispetto a x

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3b}} \sqrt{1 - \frac{c(a + e)}{3dy^2 - 1}}$$

Quindi il grafico di LC_{-1} è costituito da 4 rami, come illustrato in figura 3.4

A questo punto iterando i punti di LC_{-1} , possiamo ottenere le linee critiche di ordine successivo. Poiché $LC = F(LC_{-1})$ e in generale $LC_k = F^k(LC_{-1})$, anche le linee critiche di ordine k saranno costituite da 4 rami.

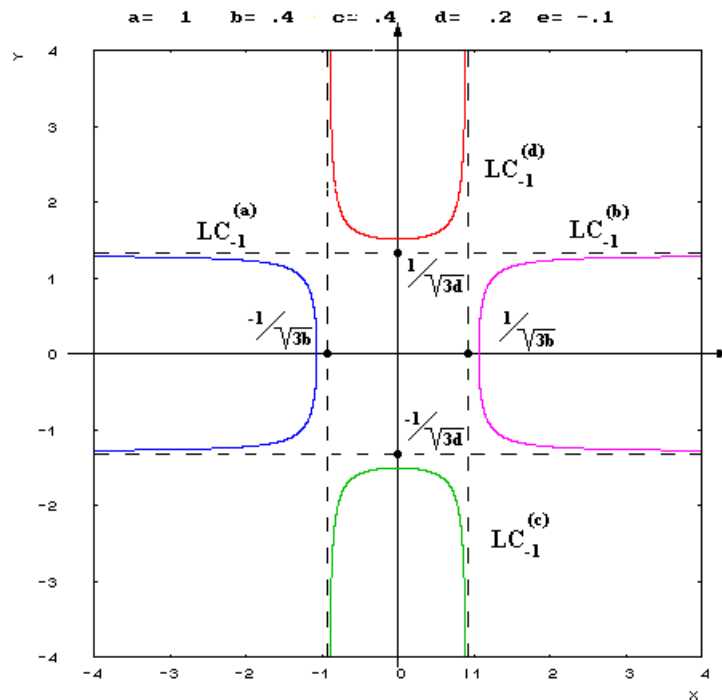


Figura 3.4

3.4.3 Zone di Molteplicità

Per determinare le zone di molteplicità ci interessano le linee critiche di 1° ordine, LC. Osserviamo la figura 3.5.

In essa sono rappresentate le linee critiche LC per un certo valore dei parametri a, b, c, d, e . È facile determinare per un punto particolare (ad esempio l'origine) il numero delle preimmagini. Una volta determinate queste, per quanto già osservato, possiamo dire che tutti i punti appartenenti alla medesima regione di tale punto possiedono lo stesso numero di preimmagini. A questo punto è facile ricostruire tutta la mappa delle zone di molteplicità tenendo presente che ad ogni attraversamento di una LC corrisponde un aumento o una diminuzione di 2 preimmagini.

In figura 3.5 è indicato anche il numero di preimmagini associato ad ogni zona di molteplicità. Si può osservare che per questo valore dei parametri si tratta di una mappa del tipo $Z_1 - Z_3 - Z_5$.

Al variare dei parametri la situazione può cambiare

In figura 3.6 si può vedere un caso in cui le linee critiche, che prima si trovavano distanti ai lati del grafico, si sovrappongono l'una all'altra creando una situazione più complessa della precedente. Un'analisi analoga a quella descritta mostra che l'origine possiede 9 preimmagini. Come prima possiamo risalire al numero di preimmagini di

ogni zona di molteplicità. La mappa è in questo caso di tipo $Z_1 - Z_3 - Z_5 - Z_7 - Z_9$.

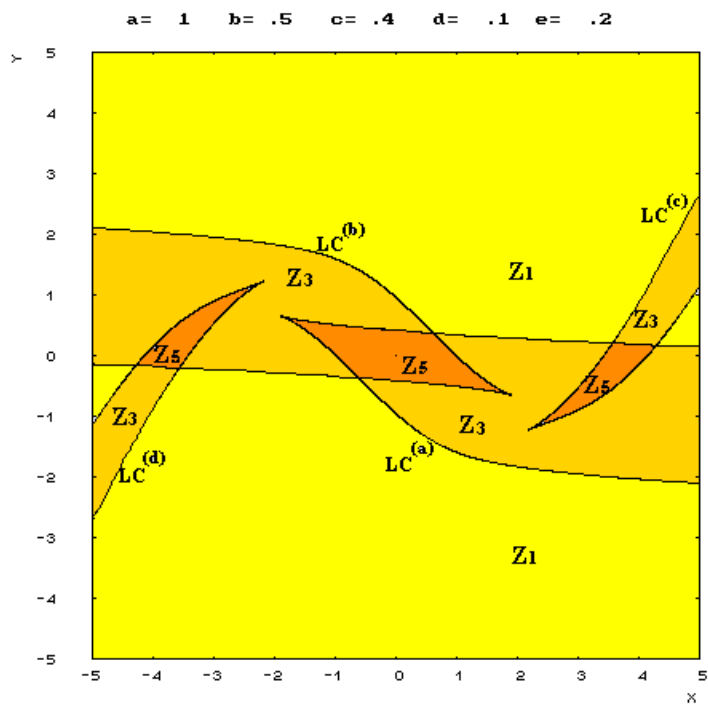


Figura 3.5

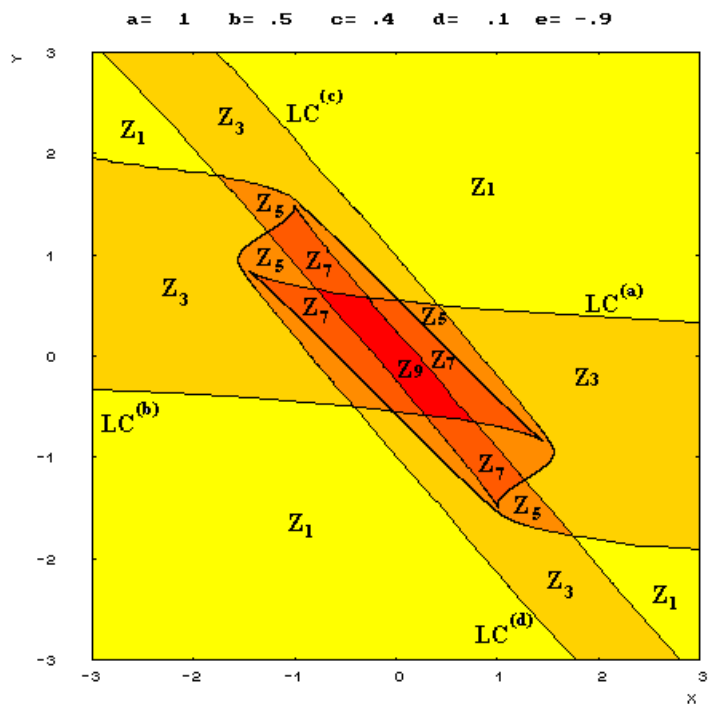


Figura 3.6

3.4.4 Interazioni di Cicli Attrattivi Invarianti con Linee Critiche

Si osservi la sequenza di immagini nelle figure da 3.A.2 a 3.A.7. In esse è evidenziata l'evoluzione del ciclo nato dalla biforcazione di Neimark-Hopf lungo la retta $a = -e$ al variare del parametro e .

Il ciclo che inizialmente è "liscio" (3.A.2) inizia ad un certo punto a sviluppare delle ondulazioni (3.A.3). Questo avviene quando le LC_{-1} intersecano il cerchio invariante. Man mano che l'intersezione si fa più ampia, tali ondulazioni si fanno più accentuate (3.A.4 e 3.A.5), fino a quando si manifestano dei "cappi" (3.A.6) che preludono allo sviluppo di un'orbita caotica (evidenziata in figura 3.A.7).

Per spiegare il ruolo delle linee critiche in questa biforcazione sviluppiamo il ragionamento considerando una mappa di tipo $Z_0 - Z_2$, poiché di più semplice analisi (ma il risultato può essere esteso anche al nostro caso). Consideriamo la figura 3.A.1

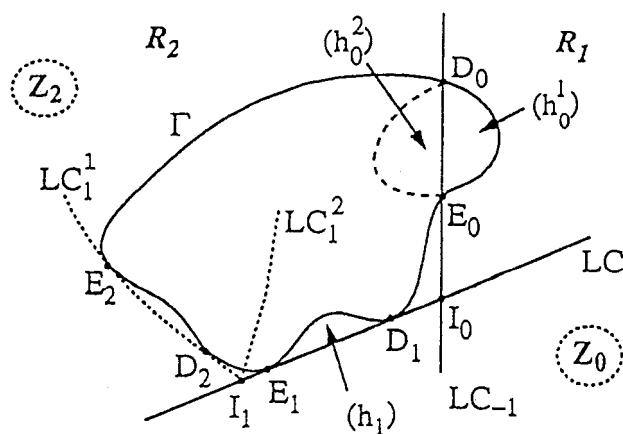


Figura 3.A.1

In essa è mostrato il caso in cui un ciclo invariante Γ interseca LC_{-1} , in due punti D_0 e E_0 . Le immagini di tali punti si trasformano nei punti di tangenza D_k e E_k della curva invariante con LC e con le linee critiche di rango più alto. Poiché il ciclo invariante non può essere mappato nella regione con 0 preimmagini, le oscillazioni nella sua forma risultano da questa tangenza.

Consideriamo l'area $(h_1) \subset (Z_2 \cap R_2)$, limitato dalla curva (D_1, E_1) di Γ e dal segmento di LC . Poiché sta in Z_2 la sua preimmagine risulta costituita di due parti, $(h_0^1) \subset R_1$ limitata dalla curva (D_0, E_0) di Γ e dal segmento di LC_{-1} e $(h_0^2) \subset R_2$ limitato dall'altra delle preimmagini di (D_1, E_1) e dallo stesso segmento di LC_{-1} .

Il fenomeno di ripiegamento dello spazio (folding) lungo la linea critica, provocato dall'iterazione della mappa, porta LC_{-1} su LC e la curva (D_0, E_0) di Γ sulla curva (D_1, E_1) insieme con la sua speculare (frontiera di (h_0^2)). Questo meccanismo produce le ondulazioni osservate.

Possiamo inoltre notare che la regione $(h_0^1) \cup (h_0^2)$ interna a Γ viene portata in (h_1) che è invece esterna a Γ . Quindi se la curva invariante è attrattiva, i punti che partono al suo

interno si avvicineranno ad essa seguendo un'orbita che non sarà necessariamente contenuta completamente in Γ . Ad un certo punto della sua evoluzione tale orbita potrebbe uscire all'esterno e di lì continuare il suo processo di avvicinamento.

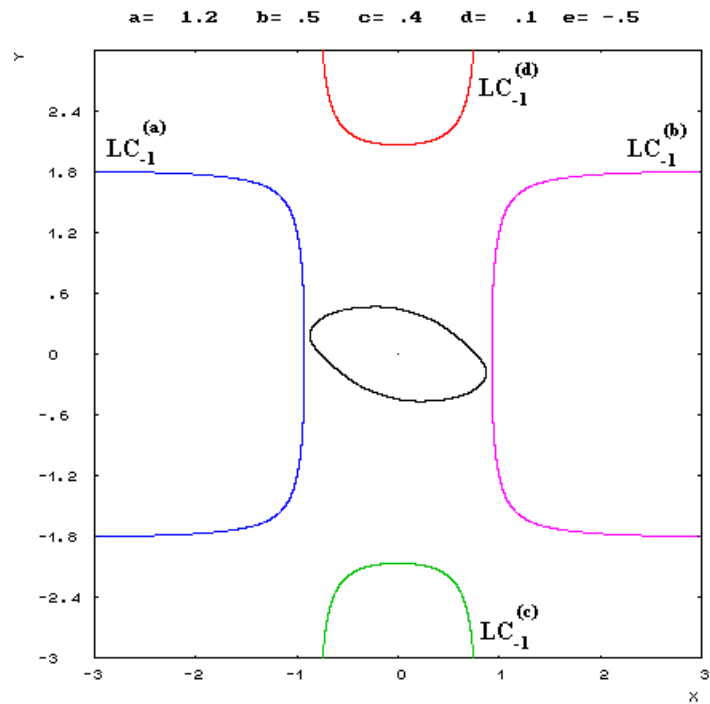


Figura 3.A.2

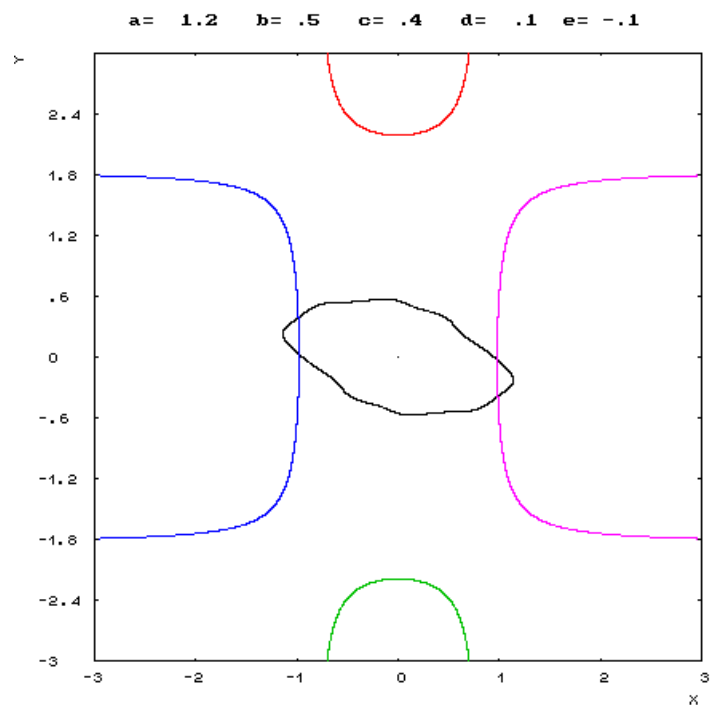


Figura 3.A.3

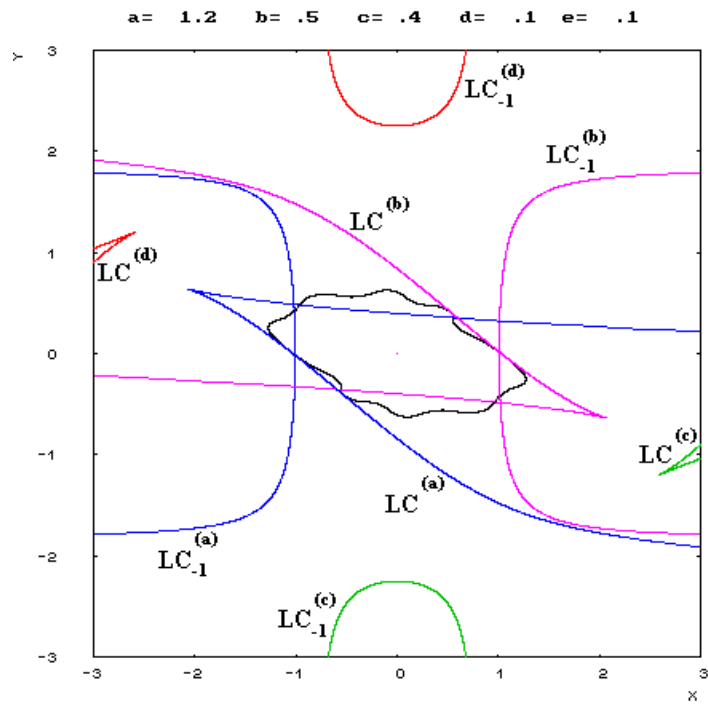


Figura 3.A.4

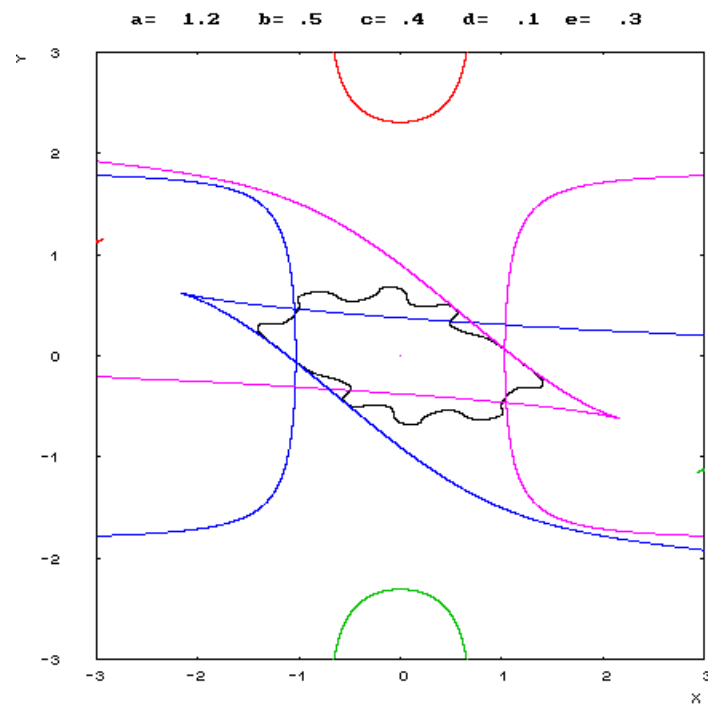


Figura 3.A.5

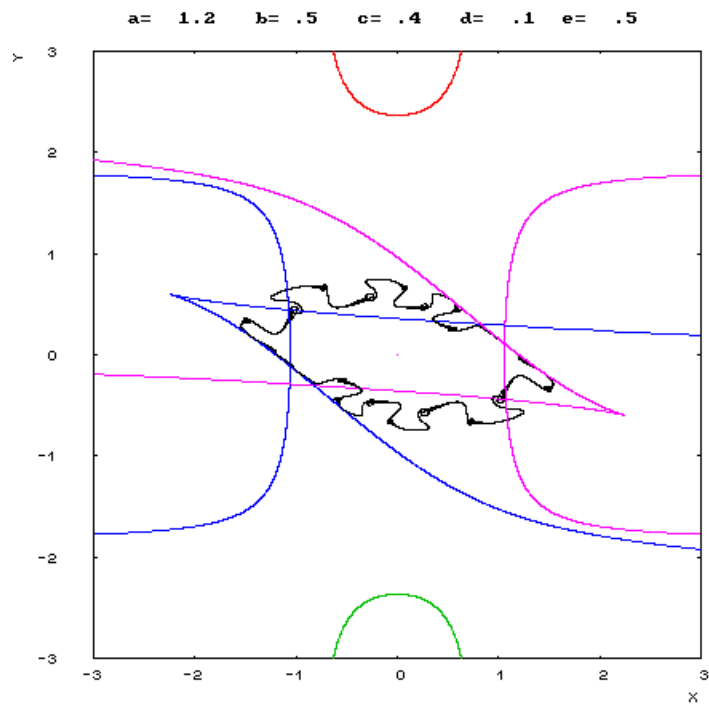


Figura 3.A.6

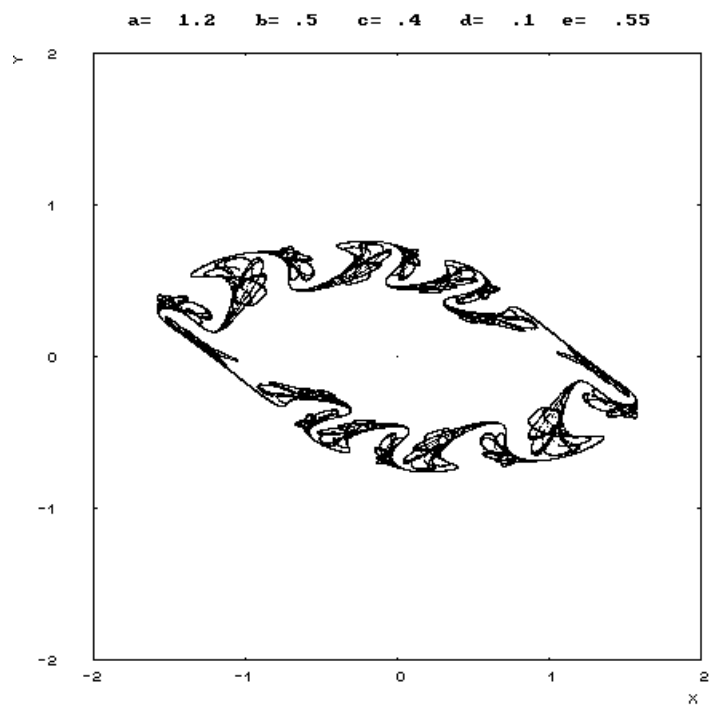


Figura 3.A.7

3.4.5 Bacino di Attrazione

Il bacino di attrazione di un certo attrattore A è costituito dall'insieme dei punti dello spazio delle fasi della mappa F che generano traiettorie convergenti ad A :

$$\gamma(A) \equiv \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid F^n(x,y) \rightarrow A \text{ per } n \rightarrow +\infty\}$$

Nel seguito indicheremo con il simbolo $\gamma(\infty)$ l'insieme dei punti del piano che generano traiettorie divergenti :

$$\gamma(\infty) \equiv \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid F^n(x,y) \rightarrow \infty \text{ per } n \rightarrow +\infty\}$$

e lo chiameremo “bacino dell'infinito”.

Nel caso di modelli applicativi l'esatta delimitazione dei bacini di attrazione costituisce un problema di notevole interesse pratico. Infatti la locale stabilità di un dato insieme invariante garantisce che esiste un intorno dell'insieme stesso tale che le traiettorie di tutti i punti che appartengono all'intorno convergono verso l'insieme invariante. Ma questo intorno potrebbe essere così piccolo da perdere ogni significato pratico. Solo un'esatta delimitazione del bacino di attrazione dà un'idea della robustezza dell'attrattore stesso rispetto a “shock” esterni, ovvero fornisce una stima dell'entità dei disturbi esogeni il cui effetto sarà neutralizzato dalla dinamica endogena del sistema, e permette, a priori, di distinguerli da quei disturbi che invece provocheranno un allontanamento definitivo e irreversibile del sistema dall'originaria situazione di equilibrio.

Nel caso della nostra mappa, l'attrattore a distanza finita, che può essere costituito da un'orbita di Hopf su cui il sistema evolve con moto periodico o quasi-periodico, oppure da un attrattore più complesso come, ad esempio, un'area caotica limitata, coesiste con un attrattore “all'infinito”, cioè con la possibilità di avere traiettorie divergenti. Per determinare la forma esatta del bacino di attrazione dell'attrattore limitato è necessario procedere all'individuazione della sua frontiera, ι , che separa $\gamma(A)$ da $\gamma(\infty)$.

La frontiera, ι , si comporta come una linea repulsiva per i punti in un suo intorno, poiché agisce come spartiacque per le traiettorie della mappa F . Si tratta di un insieme invariante. Questo significa che i punti di ι vengono mappati in ι sia sotto iterazione “in avanti” che sotto iterazione “all'indietro” della mappa. Più precisamente risulta :

$$F(\iota) \subseteq \iota \quad \text{e} \quad F^{-1}(\iota) = \iota$$

(vedi Mira et al., 1994; Mira e Rauzy, 1995).

Ne consegue che se un punto di sella (o un ciclo di punti di sella) appartiene a ι , allora ι deve contenere anche tutte le preimmagini di tale singolarità, e deve inoltre contenere

l'intera varietà stabile W^s (vedi Gumowski e Mira, 1980 ; Mira et al., 1996).

Nel nostro caso però una determinazione analitica dei punti periodici e delle loro varietà stabili non è possibile.

Attraverso una analisi numerica si possono però individuare, almeno approssimativamente, tali punti periodici. Una analisi di questo tipo effettuata fino ai cicli di periodo 16 ha consentito di individuare, oltre al punto fisso nell'origine, due cicli di periodo 2. Uno di essi è costituito di punti di sella, l'altro di nodi repulsivi. Nella tabella sottostante sono indicate le coordinate di tali punti, gli autovalori della matrice Jacobiana e il coefficiente angolare degli autovettori ad essi associati che ci consentono di identificare la direzione in cui evolvono la varietà stabile ed instabile.

Punto Fisso

$$P_0 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0,82 + i \cdot 0,6063 \\ \lambda_2 = 0,82 - i \cdot 0,6063 \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = 1.0198 \\ \varphi = 0.63668 \end{cases}$$

Ciclo -2 Sella

$$P_1^s \equiv \begin{cases} x = -1,917705093617 \\ y = 0,386426177657 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 23,1342 \\ \lambda_2 = 0,7896 \end{cases} \quad \begin{cases} m_1 = -0,06938416 \\ m_2 = -6,00720213 \end{cases}$$

$$P_2^s \equiv \begin{cases} x = 1,917705093617 \\ y = -0,386426177657 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 23,1342 \\ \lambda_2 = 0,7896 \end{cases} \quad \begin{cases} m_1 = -0,06938416 \\ m_2 = -6,00720213 \end{cases}$$

Ciclo-2 Nodi Repulsivi

$$P_1^N \equiv \begin{cases} x = 2,622300164145 \\ y = 4,71433542471 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 102,4868 \\ \lambda_2 = 27,2338 \end{cases} \quad \begin{cases} m_1 = -0,08976479 \\ m_2 = 0,89108633 \end{cases}$$

$$P_2^N \equiv \begin{cases} x = -2,622300164145 \\ y = -4,71433542471 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 102,4868 \\ \lambda_2 = 27,2338 \end{cases} \quad \begin{cases} m_1 = -0,08976479 \\ m_2 = 0,89108633 \end{cases}$$

In figura 3.B.1 è rappresentato il ciclo attrattivo invariante con il relativo bacino di attrazione (in giallo). La regione complementare (in azzurro) rappresenta il bacino d'infinito. Sulla frontiera sono evidenziati i due cicli individuati in precedenza con le relative direzioni verso cui si dipartono W^u e W^s . Anche tale immagine, come le successive, è ottenuta numericamente, scegliendo le condizioni iniziali su di una griglia e colorando il pixel corrispondente di giallo se dopo 500 iterazioni il punto si trova in un piccolo intorno dell'orbita di Hopf oppure di azzurro se $(x,y) > 1000$. Si può osservare che in questo caso la frontiera fra i due bacini è costituita dalla varietà stabile dei punti di sella unita ai punti di sella stessi ed ai nodi repulsivi in corrispondenza dei quali si forma una cuspidale del bacino d'attrazione (nodo cuspidale).

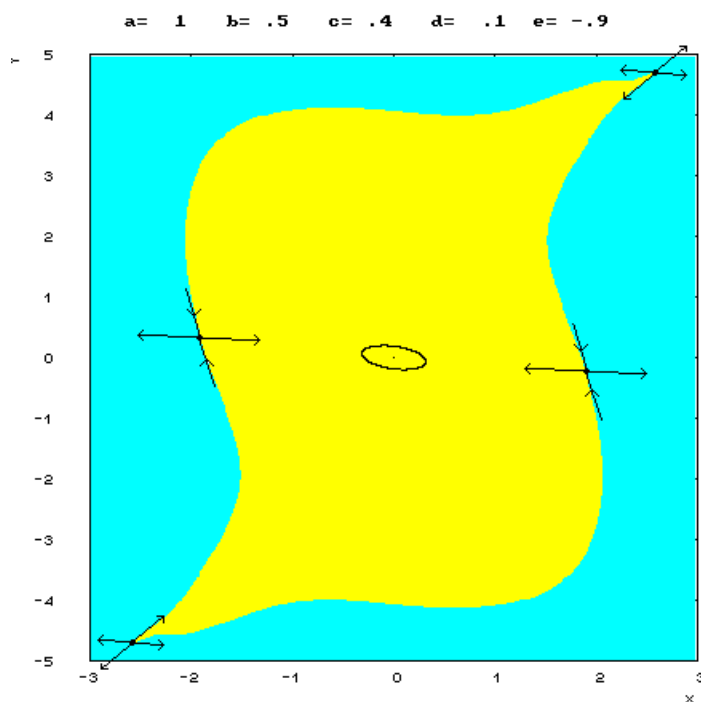


Figura 3.B.1

La figura 3.B.1 è stata ottenuta con una particolare combinazione dei valori dei parametri per la quale il bacino di attrazione dell'orbita chiusa attrattiva Γ è un insieme semplicemente-connesso.

Le figure seguenti sono state calcolate mantenendo fisso il valore dei parametri a,b,c,d e facendo crescere il parametro e (come evidenziato in alto ad ogni immagine).

In figura 3.B.2 si possono osservare delle zone azzurre all'interno del bacino $\gamma(\Gamma)$, costituite da punti che generano traiettorie divergenti.

La creazione di queste regioni, dette "buchi" (o "laghi" di $\gamma(\infty)$) avviene in corrispondenza del valore di $e = e^*$ per il quale i rami di LC intersecano la frontiera del bacino. Tale contatto fra LC e la frontiera costituisce una biforcazione globale in corrispondenza della quale si modifica la struttura qualitativa del bacino $\gamma(\Gamma)$ che si trasforma da semplicemente- a molteplicemente-connesso. Ciò è dovuto al fatto che per valori di e leggermente superiori a e^* , una parte di $\gamma(\infty)$ entra in una regione Z_3 con la creazione di due nuove preimmagini che si fondono su un tratto del corrispondente ramo di LC_{-1} . Tali preimmagini costituiscono il primo lago (o lago principale) i cui punti sono mappati nella regione di $\gamma(\infty)$ compresa in Z_3 per poi generare traiettorie divergenti. Tali laghi, a loro volta, appartengono a Z_1 e quindi possiedono una preimmagine che costituisce il lago secondario più piccolo. Tali preimmagini costituiscono una sequenza infinita poiché la nostra mappa ammette almeno una preimmagine per ogni punto del piano e quindi generano una sequenza infinita di laghi (o "sequenza arborea di laghi") che, come si può osservare, si accumulano in alto a sinistra e in basso a destra del bacino $\gamma(\Gamma)$, (vedi Mira et al., 1994, per una trattazione

rigorosa di questo tipo di biforcazione globale, oppure Abraham et al., 1996, per una semplice e chiara esposizione dell'argomento).

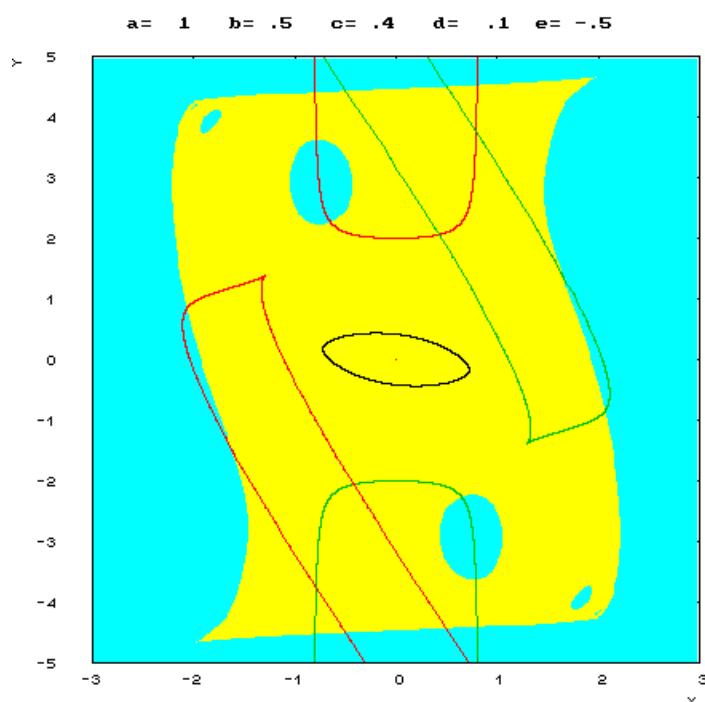


Figura 3.B.2

Incrementando ulteriormente il valore di e , LC continua a muoversi producendo un allargamento dei laghi. Questo fatto causa una sorta di diminuzione di predicibilità, poiché se la posizione iniziale del mercato si trova vicino ai laghi, piccoli movimenti dovuti a shock esterni potrebbero portare nel bacino di infinito e quindi generare traiettorie divergenti che allontanerebbero dall'equilibrio.

Aumentando ancora il valore di e , si verifica una seconda biforcazione globale quando LC attraversa la frontiera in corrispondenza dei nodi cuspidali (vedi figura 3.B.3) cosicché LC si trova, da un certo punto in poi, in $\gamma(\infty)$ senza più rientrare in $\gamma(\Gamma)$.

Dopo questa biforcazione tutti i laghi stabiliscono un contatto con la frontiera τ ricongiungendosi alla parte connessa di $\gamma(\infty)$ (il "mare aperto"). Il bacino $\gamma(\Gamma)$ torna ad essere semplicemente-connesso, ma la sua frontiera τ possiede adesso una struttura frattale. La struttura frattale caratterizzata da "autosimilarità" può essere evidenziata da successivi ingrandimenti come in figura 3.B.4.

Procedendo ancora all'aumento di e , il bacino subisce ulteriori trasformazioni.

Le ondulazioni conseguenti alla riunione dei "laghi" con il "mare" tendono man mano ad addolcirsi (ma la frontiera rimane frattale, figura 3.B.5), contemporaneamente nascono nuovi laghi, risultato dell'intersezione delle altre due LC con la frontiera τ .

Nello stesso tempo il ciclo invariante Γ comincia a subire delle trasformazioni analoghe a quella descritta al punto A.

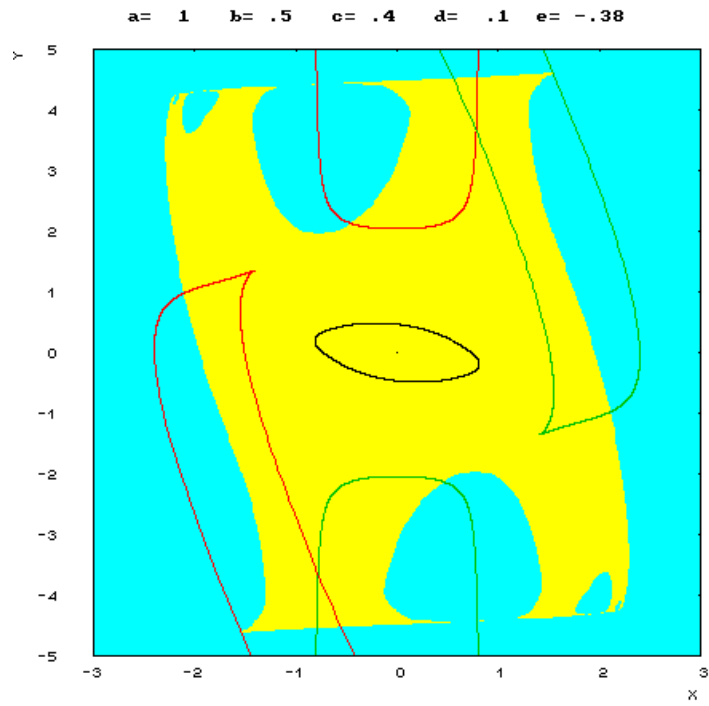


Figura 3.B.3

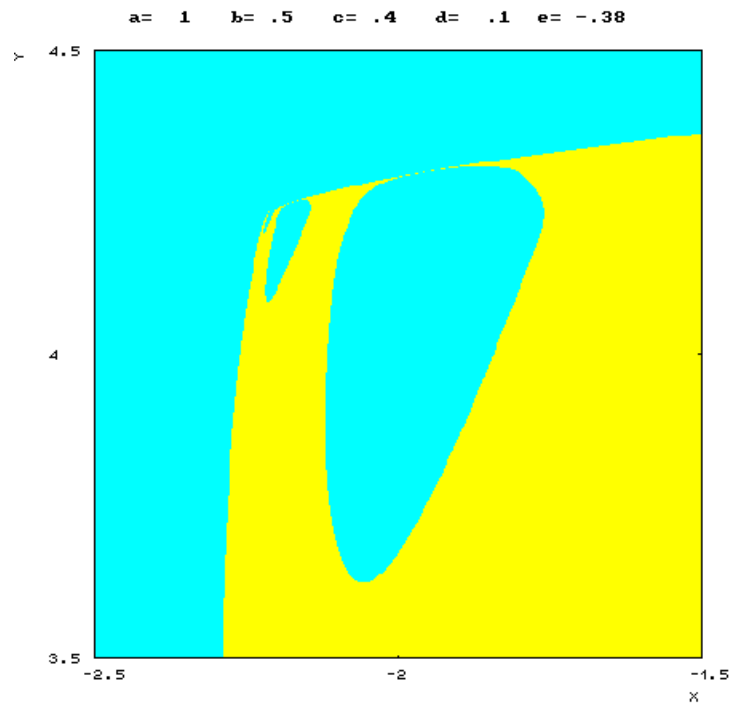


Figura 3.B.4

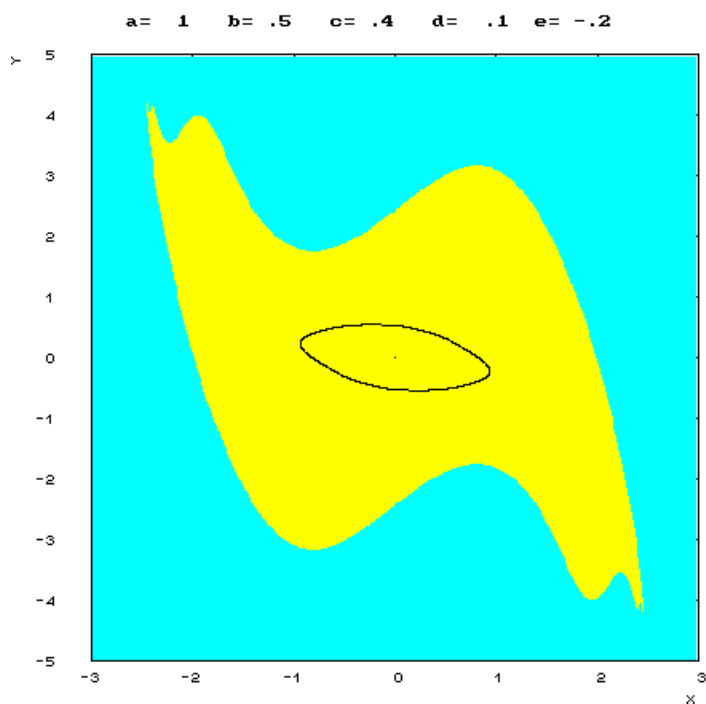


Figura 3.B.5

Nelle figure 3.B.6 e 3.B.7 si notano le ondulazioni dovute all'intersezione di LC_{-1} con Γ e le isole conseguenti all'intersezione di LC con ι .

Le trasformazioni del ciclo invariante si coniugano, in questa sequenza, alla presenza di un fenomeno di risonanza. Ad un certo punto infatti si entra nel “corno di Arnold” relativo alle risonanze di periodo 10 e quindi nella nostra simulazione l'anello Γ scompare lasciando spazio a tale ciclo (vedi figure 3.B.8 e 3.B.9). In questa situazione si sovrappongono due aspetti :

1. da una parte l'orbita sull'attrattore è periodica di periodo 10, fatto che ci consente di avere una forte predicibilità dell'evoluzione del mercato quando si è giunti a regime.

2. dall'altra parte il bacino di attrazione di tale orbita si va man mano restringendo, mentre i laghi di $\gamma(\infty)$ aumentano la propria ampiezza, cosicché il mercato può allontanarsi dalla configurazione di equilibrio in maniera definitiva, anche in conseguenza di shock esterni molto piccoli.

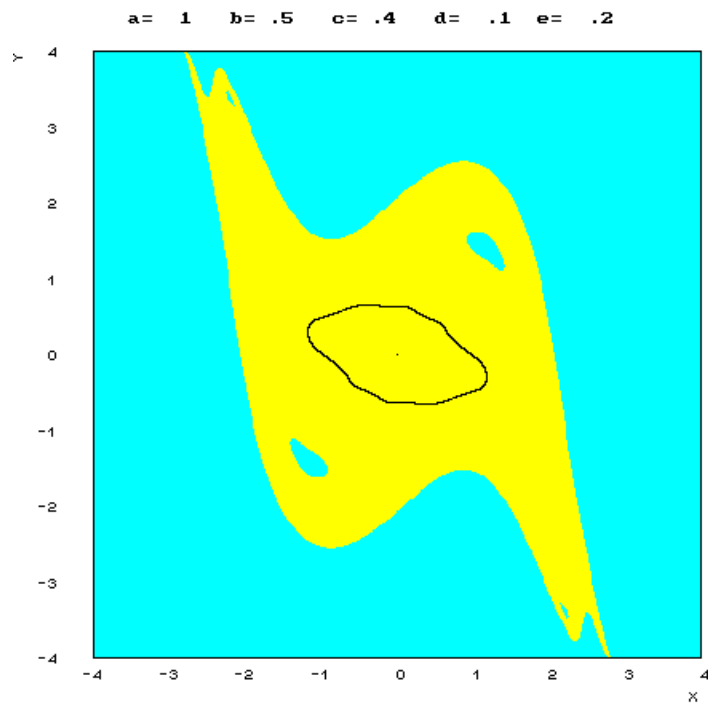


Figura 3.B.6

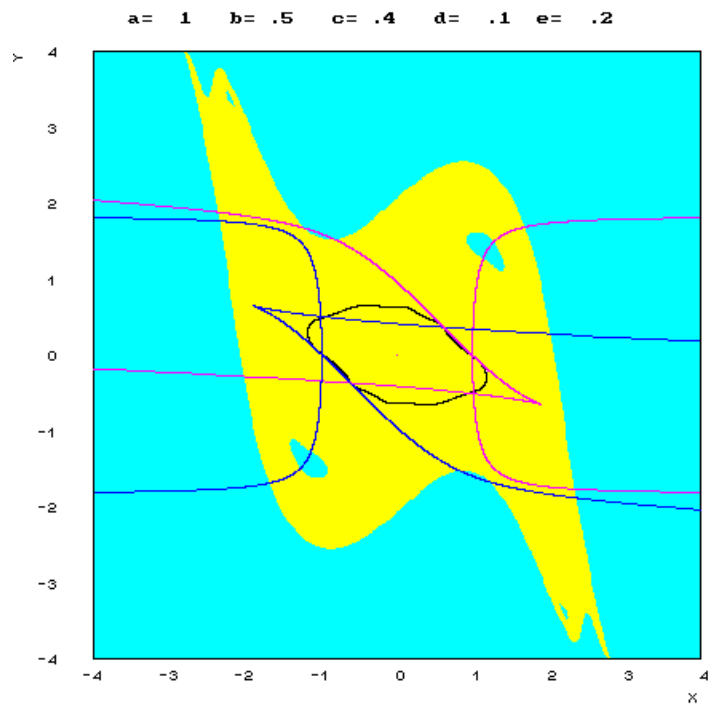


Figura 3.B.7

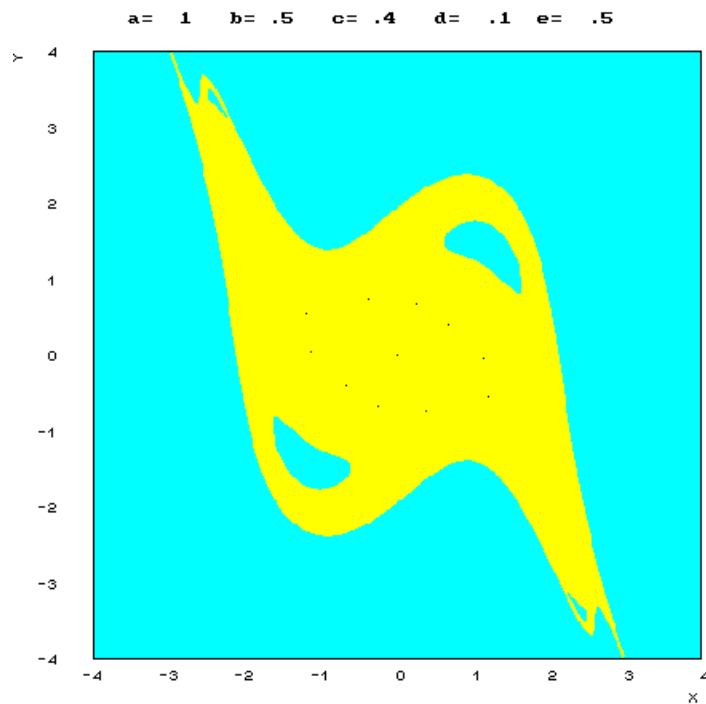


Figura 3.B.8

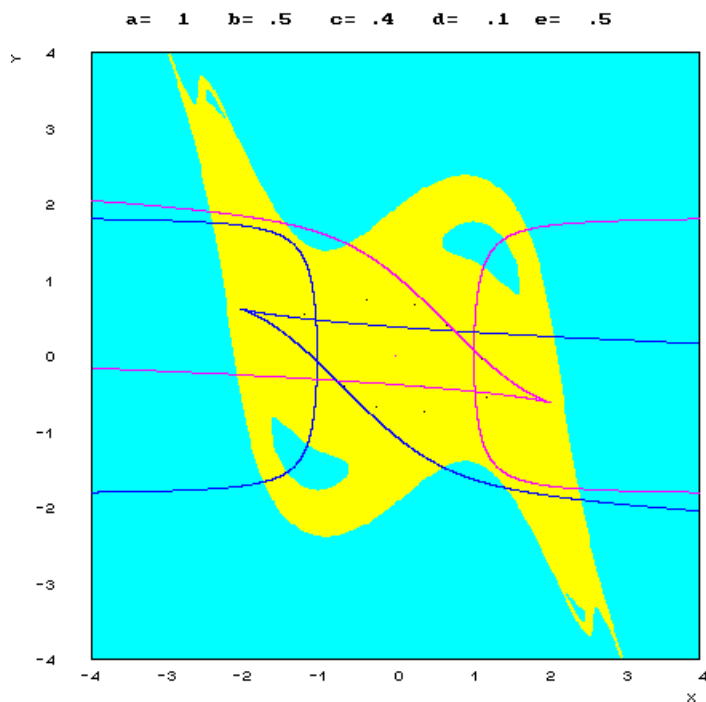


Figura 3.B.9

Incrementando ancora il valore di e e questo fenomeno di restringimento del bacino di attrazione continua ad accentuarsi. Al tempo stesso l'orbita invariante continua la sua transizione che la porterà a trasformarsi in un attrattore caotico. A differenza di quanto succedeva nel caso analizzato al punto A, il fatto di trovarsi in un

corno di risonanza consente di mantenere più a lungo una certa predicibilità del sistema. Inizialmente i punti appartenenti al ciclo-10 subiscono a loro volta una biforcazione di Neimark-Hopf, diventando repulsivi e generando un'orbita attrattiva invariante e ciclica dello stesso periodo, (vedi figura 3.B.10 e l'ingrandimento di una di tali orbite in 3.B.11).

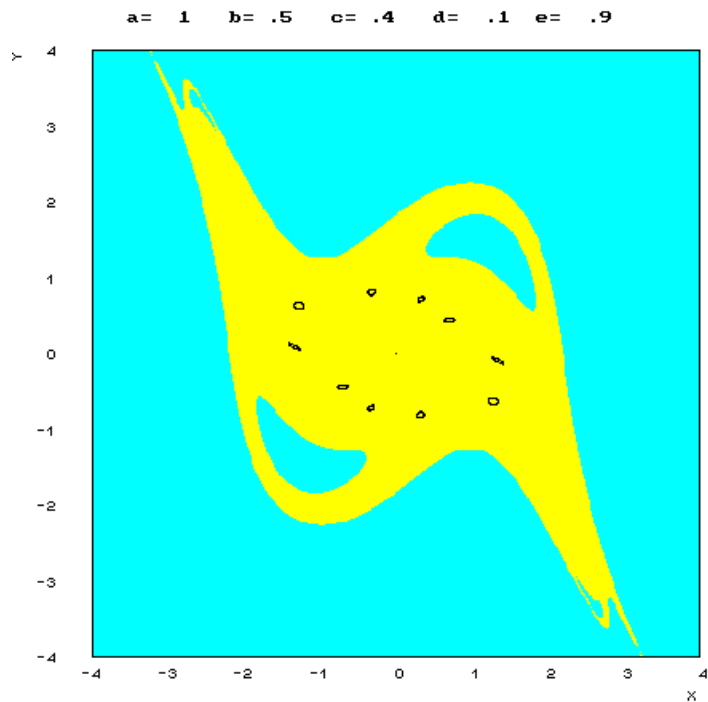


Figura 3.B.10

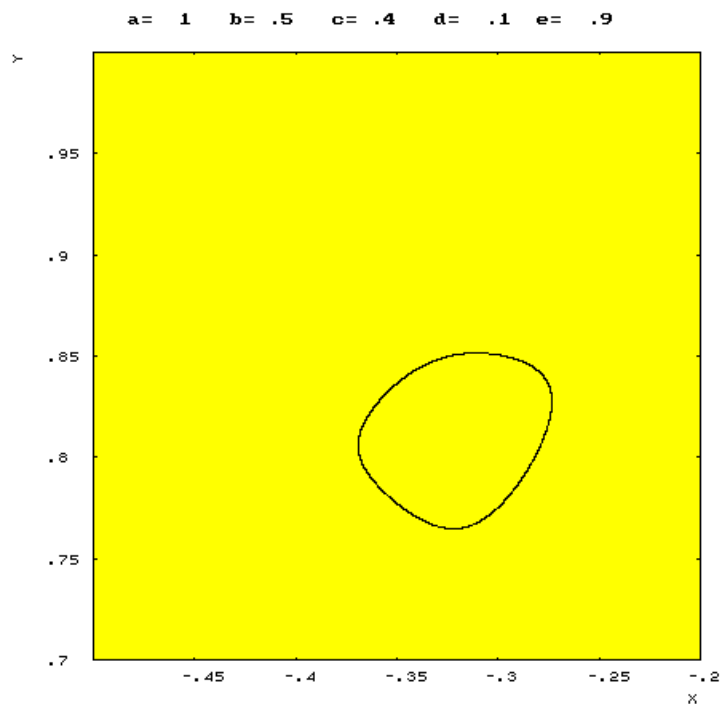


Figura 3.B.11

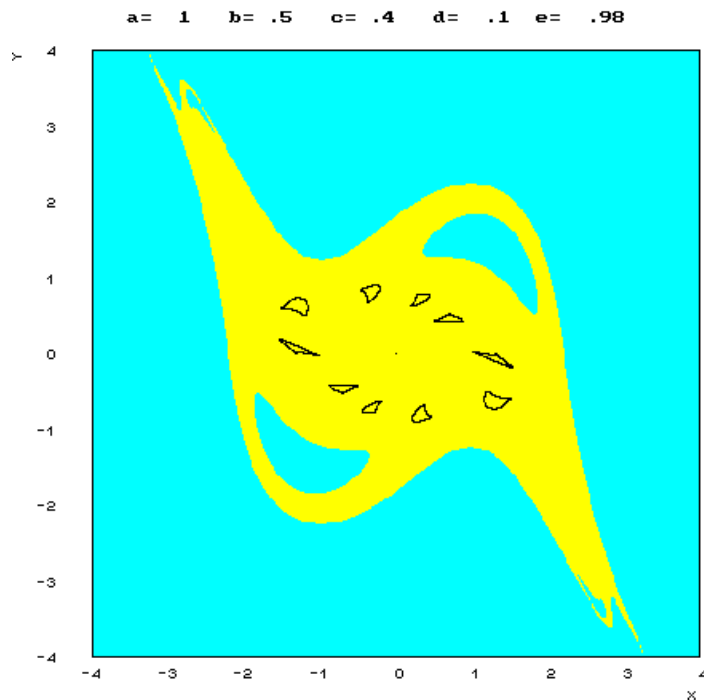


Figura 3.B.12

Infine anche tali orbite cominciano a presentare delle ondulazioni e ad assumere forme più irregolari (figura 3.B.12). E' l'inizio di una evoluzione dell'attrattore verso forme sempre più complesse che sembrano essere generate dall'unirsi e dall'intrecciarsi delle 10 orbite preesistenti.

Man mano che il parametro aumenta, le diverse curve invarianti prima presenti si sfrangiavano e a poco a poco si connettono. Quando il parametro assume il valore 1, l'attrattore non è più sconnesso. Il sistema visita una zona intorno all'origine che ha definitivamente perso ogni carattere unidimensionale. L'attrattore, tuttavia, conserva ancora una qualche struttura (figura 3.B.13) e può pensarsi come unione degli insiemi invarianti in cui è progressivamente degenerata l'orbita periodica iniziale e la famiglia di curve chiuse a cui questa, mediante una biforcazione di Hopf, aveva successivamente dato luogo.

Anche tale struttura residua, in cui riusciamo a riconoscere il sovrapporsi di un numero finito di oggetti geometrici attrattivi, si attenua e svanisce se il parametro è diviene ancora più grande (figure 3.B.14 e 3.B.15)

Nell'immagine di figura 3.B.16, le traiettorie del sistema ricoprono, a regime, in modo quasi uniforme, una regione limitata del piano che rispetto alla situazione in 3.B.15 mantiene quasi inalterato il suo bordo esterno, mentre, internamente tende a richiudersi sopra l'origine.

Il processo può ormai definirsi caotico : il mercato "transita" in modo apparentemente casuale dall'una all'altra delle diverse zone in cui l'attrattore può essere ripartito. Al tempo stesso il bacino di attrazione si è ristretto, quasi avvolgendosi sull'attrattore, cosicché piccoli shock esogeni che perturbino il mercato portandolo in una posizione

esterna all'attrattore, rischiano di allontanarsi indefinitamente dall'equilibrio. Nessuna previsione economica è possibile : punti inizialmente vicini si allontanano progressivamente per trovarsi, dopo poche iterazioni, da parti opposte dell'attrattore e riaccostarsi, successivamente, senza alcun ordine.

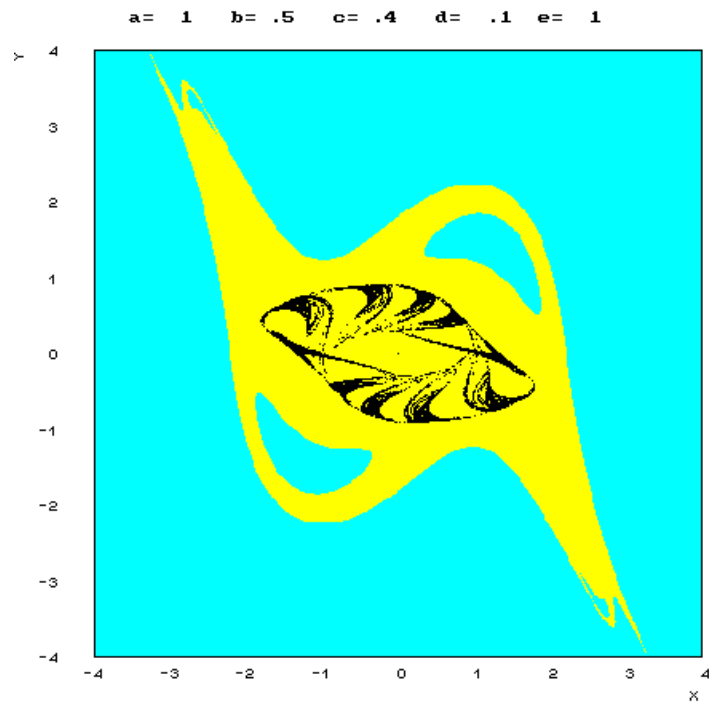


Figura 3.B.13

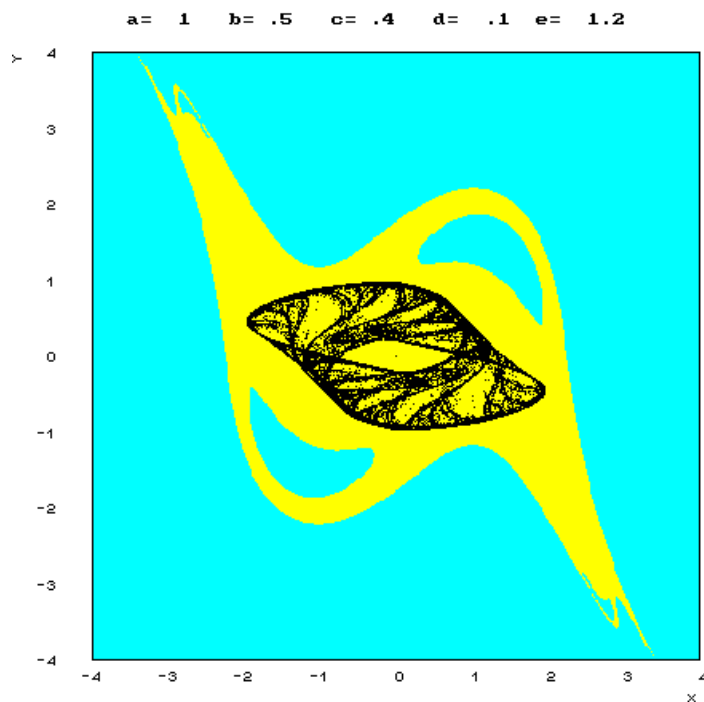


Figura 3.B.14

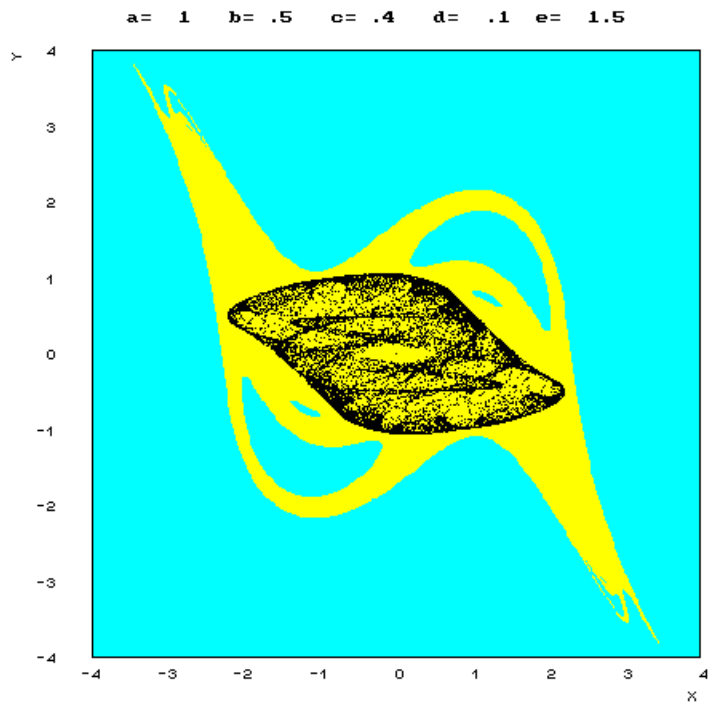


Figura 3.B.15

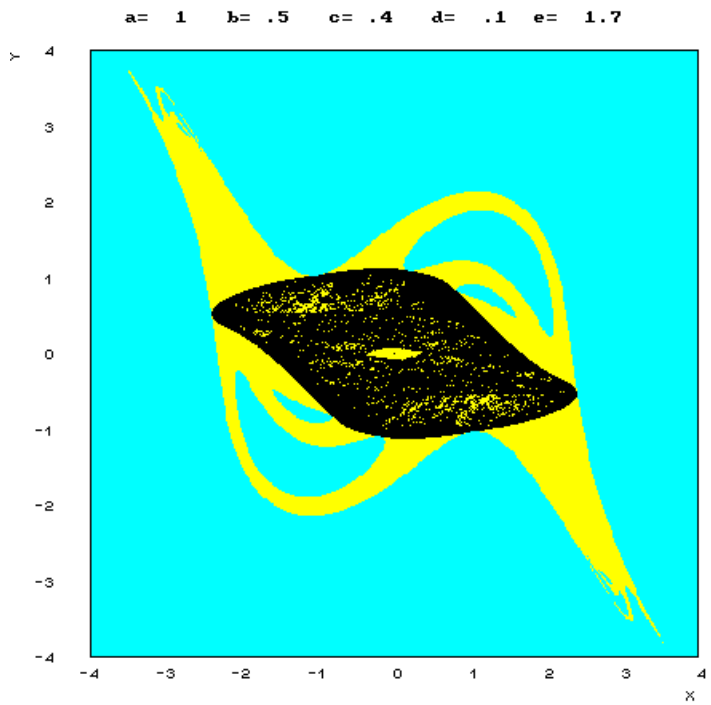


Figura 3.B.16

Questa estrema erraticità dei corsi azionari e della raccolta dei fondi prelude al collasso, o se si preferisce, all'esplosione del sistema.

In figura 3.B.16 l'area caotica collide con la frontiera di $\gamma(\infty)$. Questa biforcazione di contatto è conosciuta come "biforcazione finale" (Mira et al.,1996 ; Abraham et al.,1996) e causa la distruzione dell'attrattore a distanza finita.

Per valori del parametro successivi a quelli per i quali si è verificata tale biforcazione, la generica situazione iniziale di mercato genera traiettorie che divergono in poco tempo. L'equilibrio repulsivo che si trova nell'origine governa la dinamica in modo globale. L'attrattore caotico è scomparso; da ogni stato iniziale il mercato si muove descrivendo una successione di punti illimitata, lungo cui le due componenti s e p tendono a diventare infinitamente grandi.

3.4.6 Delimitazione dell'attrattore caotico attraverso l'uso delle linee critiche.

Adesso sfruttiamo la "proprietà generatrice" delle linee critiche, introdotta nel capitolo a loro dedicato, al fine di delimitare con precisione uno degli attrattori caotici incontrati nel paragrafo precedente.

Consideriamo la sequenza di immagini in figura 3.C.1a e 3.C.1b

Nella prima di esse è evidenziato un tratto di LC_{-1} . Si tratta della parte della linea critica che risulta compresa nell'attrattore. Sarà iterando tale segmento di LC_{-1} (arco generatore) che otterremo la delimitazione dell'attrattore.

Nelle immagini della sequenza viene ogni volta aggiunta una iterata di LC_{-1} . Ognuna di esse si riunisce alle precedenti, per effetto del folding conseguente all'iterazione della mappa. Dopo 9 iterate (fino a LC_8), l'area assorbente entro cui si trova l'attrattore caotico è perfettamente definita. A questo punto tutte le iterate successive dovranno necessariamente svilupparsi dentro l'area assorbente definendo man mano aree assorbenti sempre più piccole. Alla fine il risultato è quello di figura 3.C.2, che combacia perfettamente con l'attrattore caotico mostrato in figura 3.C.3.

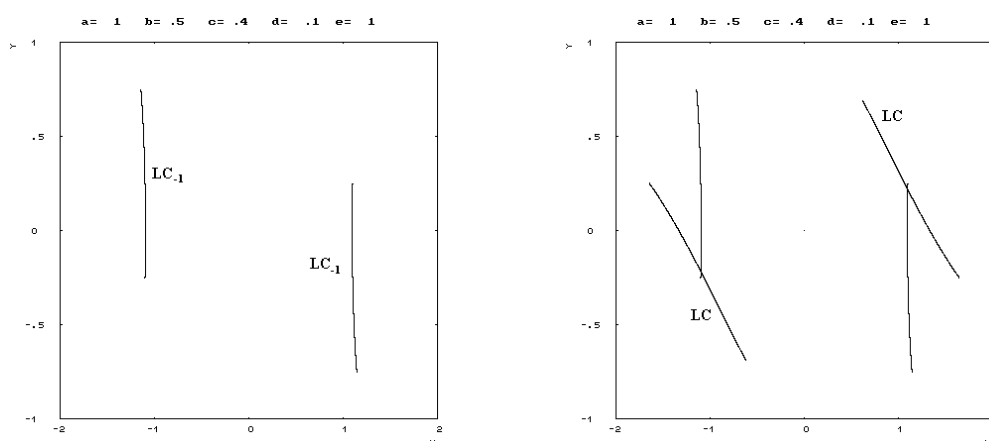


Figura 3.C.1a

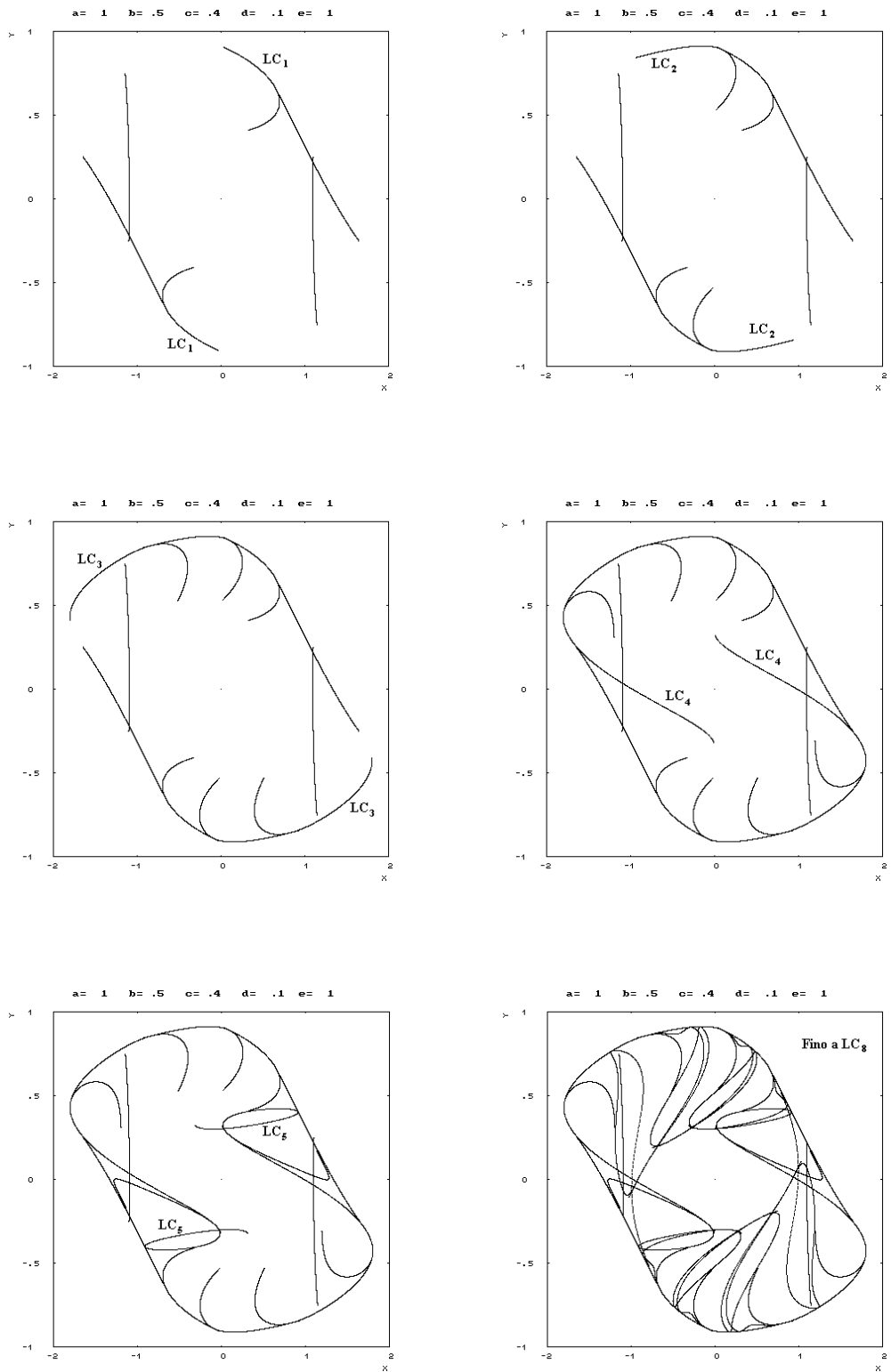


Figura 3.C.1b

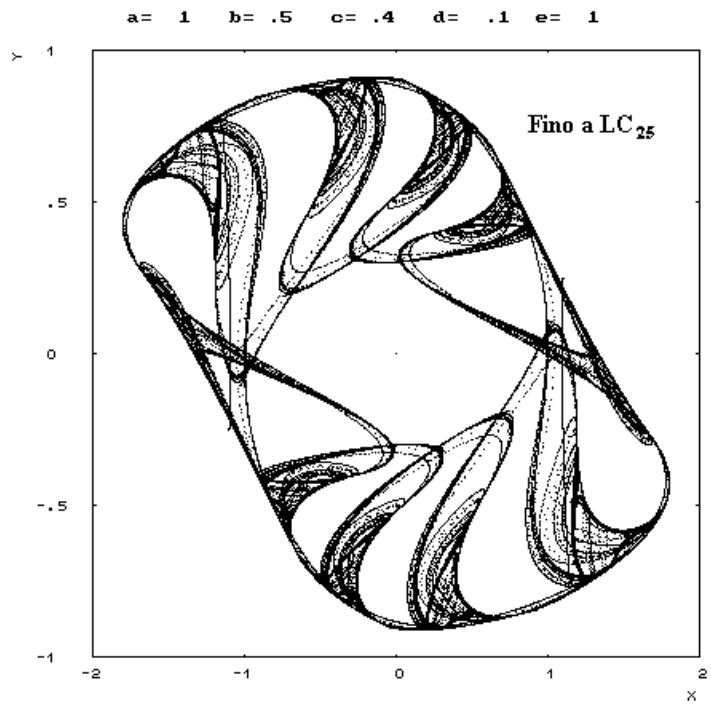


Figura 3.C.2

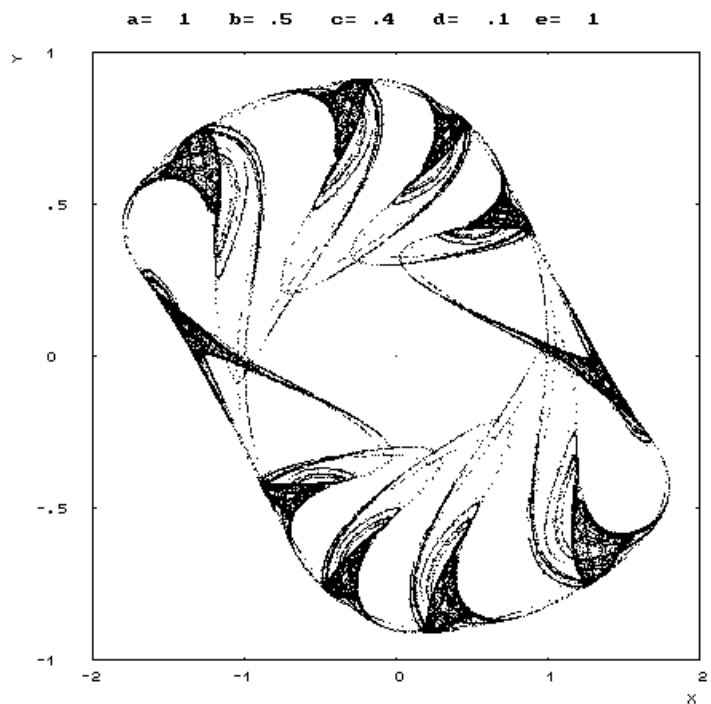


Figura 3.C.3

3.5 CONCLUSIONI

Nella sua versione continua, come abbiamo ricordato all'inizio, il modello descrive comportamenti dinamici che convergono, indipendentemente dalla configurazione iniziale, ad un unico ciclo limite attrattivo.

L'equilibrio (\bar{s}, \bar{p}) non viene mai raggiunto ed il sistema, per quanto al tempo zero possa trovarsi ad esso vicino, finirà sempre per allontanarsene mentre a regime il suo moto risulterà caratterizzato dal prevalere di una dinamica periodica regolare che interessa entrambe le variabili.

Nel caso discreto le dinamiche potenziali sono estremamente più numerose ed una loro completa classificazione non è possibile. Il mercato può convergere verso un'orbita periodica, od una curva chiusa invariante, entrambe generate da una biforcazione di Neimark-Hopf, oppure essere catturato da un attrattore strano lungo il quale la sua dinamica non presenta alcuna regolarità, o divergere, infine, in una od entrambe le sue componenti.

Possiamo notare che in tutto l'insieme a cui appartengono le coppie dei parametri (e, a) economicamente significative, l'origine non è un punto attrattivo. Il sistema pertanto, analogamente a quanto accade per il modello continuo, non tende mai al suo unico equilibrio. Ciò potrebbe accadere soltanto se ammettessimo valori di $e < -a$, la cui introduzione andrebbe riferita alla presenza di una "vocazione antispeculativa" degli operatori.

Sulla retta $e + a = 0$ si verifica una biforcazione di Hopf. Si genera così una curva invariante attrattiva intorno a (\bar{s}, \bar{p}) che caratterizza lo spazio delle fasi quando ci troviamo in prossimità dei valori di biforcazione. Questo fenomeno è particolarmente importante e merita un'ulteriore analisi, in quanto ci consente di mettere in evidenza il ruolo decisivo ricoperto dalla propensione speculativa dei risparmiatori nel definire la dinamica del modello.

Inizialmente, per valori molto bassi di e , il mercato assume un andamento ciclico molto regolare.

Successivamente, all'aumentare della vocazione speculativa degli operatori, si ottengono, per valori di a fissati, le traiettorie più complesse che abbiamo elaborato in precedenza.

In prossimità dei valori di biforcazione, la dinamica del modello discreto è indistinguibile, a regime, da quella che si svolge nel caso continuo su di una curva chiusa ed è contraddistinta da una certa regolarità. Il sistema ruota su di un ciclo invariante, spostandosi mediamente di uno stesso arco.

Questa omogeneità di comportamenti è solo apparente in quanto in tale regione del piano dei parametri, si alternano situazioni per le quali si verificano processi periodici localmente stabili, di periodo qualunque (come quelli incontrati analizzando il caso B) e processi periodici che danno luogo a traiettorie dense sull'intera curva attrattiva (come quelli visti nel caso A).

Nessuna delle due tipologie di comportamento può essere considerata eccezionale. Lo

studio delle lingue di Arnold e dei loro assi, condotto nel paragrafo dedicato all'analisi locale del modello, consente di definire le direzioni lungo le quali spingersi affinché un determinato comportamento periodico possa conservarsi. Tale studio suggerisce inoltre quali valori relativi devono assumere la propensione a monetizzare i guadagni realizzati, A , e la propensione a rinviare le iniziative di vendita in attesa di ulteriori incrementi nei prezzi, E , perché una specifica configurazione dinamica sia mantenuta.

Al tempo stesso l'analisi del bacino di attrazione ci ha mostrato che il sistema non è robusto rispetto ad ogni tipo di shock. Infatti abbiamo visto che il bacino $\gamma(\Gamma)$ presenta, anche per valori di e molto bassi, dei laghi di $\gamma(\infty)$, ovvero delle regioni limitate che pur essendo circondate dal bacino di attrazione del ciclo Γ sono costituite da punti le cui orbite divergono ad infinito. Shock esterni che perturbino il sistema portandolo in uno di tali "laghi" lo condannerebbero irrimediabilmente ad allontanarsi dal punto di equilibrio, a meno di interventi esterni riequilibratori.

Facendo riferimento a questo aspetto si potrebbero definire delle "direzioni pericolose" e delle "direzioni sicure" di perturbazione in dipendenza della probabilità di incontrare posizioni che portano alla divergenza e della vicinanza di tali regioni all'attrattore.

I fenomeni di natura ciclica presentano dunque, nel caso discreto, una varietà di scenari alternativi sconosciuta al caso continuo. Ma la varietà dei possibili comportamenti asintotici non si esaurisce con essi.

Nell'arco della nostra analisi si sono presentate situazioni molto diverse fra loro. In un caso abbiamo visto il ciclo limite presentare delle ondulazioni e perdere successivamente la sua "levigatezza" per generare, infine, un'orbita caotica che però restava confinata in una regione dello spazio molto limitata. Quindi, utilizzando la terminologia introdotta da Collett e Eckmann, le traiettorie diventano da "ergodiche" a "caotiche" provocando una forte diminuzione della predicibilità del sistema a causa dell'improvviso manifestare dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali, come rilevato anche nel lavoro di Gori e Rinaldi.

In un altro caso la transizione verso dinamiche di tipo caotico è stata, per così dire, più sofferta. L'analisi del ciclo di Hopf ha ugualmente manifestato le ondulazioni susseguenti alla sua intersezione con le linee critiche LC_{-1} ma anziché condurre a traiettorie man mano più complesse, preludio al caos, si è inizialmente sviluppata un'orbita periodica stabile di periodo 10. La predicibilità dei movimenti del mercato è in questa situazione massima in quanto conoscendo lo stato attuale è possibile determinare con precisione quello successivo. L'analisi dei bacini di attrazione, al contrario, ci mostra una situazione che si sta man mano deteriorando. I laghi che si erano formati inizialmente si sono ricongiunti al bacino d'infinito causando la sua frattalizzazione e, soprattutto, producendo delle ondulazioni della frontiera che in certi casi si avvicina pericolosamente all'attrattore. Al tempo stesso nuovi laghi si sono formati, cosicché shock esterni che portino il mercato fuori dal ciclo di equilibrio possono in molti casi risolversi in un allontanamento indefinito da esso.

Man mano che la vocazione speculativa dei risparmiatori aumenta si verifica una nuova biforcazione di Hopf, che in questo caso interessa i punti del ciclo.

Quando si verifica questa seconda biforcazione di Hopf il ciclo di equilibrio scompare mentre due distinte periodicità si affermano al suo posto. Una “periodicità globale” che proviene e si conserva dall’orbita precedente ed una “periodicità locale” che interessa i cicli di dimensione minore. Successivamente le dinamiche si complicano sempre più. Sui mercati mobiliari il sovrapporsi di questo insieme di comportamenti ciclici diversi apre la strada ad un contesto dinamico all’interno del quale si perde ogni predicibilità.

Al crescere di e , in poco tempo, i nuovi cicli si deformano fino a sfaldarsi per poi ricongiungersi l’un l’altro a ricostituire un’orbita continua. Questo nuovo attrattore connesso però, a differenza del ciclo iniziale, manifesta chiari segni della presenza di dinamiche caotiche. Al tempo stesso il bacino di attrazione, come avevamo già osservato, continua a restringersi, diminuendo sempre più la capacità del sistema di riassorbire automaticamente shock esterni.

La situazione si deteriora sempre più fino a giungere alla biforcazione finale con la scomparsa dell’attrattore finito.

Osserviamo che anche in tale situazione, in prossimità dei valori dei parametri per i quali si verifica la biforcazione finale, continua ad esistere un transitorio che per un po’ di tempo ricalca le traiettorie che prima appartenevano all’attrattore; questo però avviene solo per un numero finito di iterazioni prima di entrare in $\gamma(\infty)$ e divergere.

In questa situazione anche un intervento esterno che riporti il mercato vicino alla posizione di equilibrio (\bar{s}, \bar{p}) non può avere che un effetto transitorio. Il mercato non funziona più e qualunque intervento esterno per riequilibrarlo si rivelerà, almeno nel lungo periodo, totalmente inutile.