

Capitolo 3

Apprendimento delle previsioni altrui in una politica di *Inflation Targeting*

Introduzione al Capitolo 3

In questo lavoro analizziamo gli effetti di una politica di inflation targeting in una economia con razionalità limitata.

L'analisi di una politica di inflation targeting è stata oggetto di molta attenzione nella letteratura più recente, si veda [11, 59, 60, 61]. La ragione principale per questo fiorire di studi è da ricercare nel fatto che questo tipo di politica è stata utilizzata recentemente da autorità monetarie di numerosi Paesi, si veda [24, 62]. L'analisi di questi studi fa perlopiù riferimento ad una economia con aspettative razionali.

L'analisi di una politica monetaria sotto l'ipotesi di razionalità limitata è stata spesso impiegata a supporto di una analisi con aspettative razionali. Infatti, abbandonata l'ipotesi di aspettative razionali in quanto giudicata poco realistica per le ipotesi che si vengono a fare riguardo alle conoscenze degli agenti economici (conoscenza del modello, utilizzo delle informazioni in modo efficiente), si è proceduto ad indebolire le stesse (razionalità limitata) con l'obiettivo di valutare se e quando l'economia con queste caratteristiche si avvicina a quella reale e a quella prevista sotto l'ipotesi di razionalità perfetta.

L'approccio classico in un contesto di razionalità limitata ipotizza che

gli agenti dell'economia aggiornino le loro aspettative tramite una regola di apprendimento ricorsivo fondato sull'errore di previsione, regola che risulta essere correttamente specificata in corrispondenza di un equilibrio con aspettative razionali. In alcuni modelli, questa regola di apprendimento è quella classica delle aspettative adattive. Tramite questa regola di apprendimento, gli agenti sono in grado di apprendere un equilibrio stazionario con aspettative razionali, in corrispondenza dello stesso gli agenti non mutano le loro opinioni. In questa prospettiva la domanda a cui dobbiamo dare una risposta è la seguente *un equilibrio con aspettative razionali è stabile rispetto ad un processo con apprendimento?*

Se la risposta è affermativa (*expectational stability*), allora la soluzione con aspettative razionali assume un significato interpretativo della realtà rilevante in quanto gli agenti dotati di razionalità limitata giungono ad apprendere la stessa al limite. La soluzione con aspettative razionali assume una giustificazione di tipo evolutivo. Il criterio dell'*expectational stability* può essere impiegato in diverse direzioni. L'applicazione più classica è nella selezione degli equilibri in modelli con molteplicità degli stessi, si veda ad esempio [9, 10]. Tra più equilibri con aspettative razionali, quello stabile rispetto al processo di apprendimento assume un significato interpretativo della realtà rilevante. Il criterio dell'*expectational stability* può anche essere utilizzato per valutare politiche monetarie che perseguono gli stessi obiettivi, si veda [11], o per valutare la plausibilità di una politica monetaria al variare dei parametri, si veda [10]. Essendo l'*expectational stability* una proprietà importante per un equilibrio associato ad una politica monetaria, tanto più ampia è la regione dei parametri del modello che conduce all'*expectational stability* tanto più interessante sarà la stessa nell'ottica di una sua applicazione. La non stabilità rispetto ad un processo di apprendimento la rende invece poco significativa.

In questo lavoro analizziamo una politica monetaria che mira a stabilizzare il saggio di inflazione attorno ad un obiettivo. La nostra analisi ha due scopi. Da un lato intendiamo analizzare l'economia con razionalità limitata ed in particolare la stabilità dell'equilibrio con aspettative razionali al variare dei parametri della stessa (target di inflazione, memoria degli agenti, ecc.), dall'altro intendiamo valutare quale metodo di stima delle aspettative del settore privato da parte della Banca Centrale garantisce la maggiore stabilità per l'equilibrio con aspettative razionali. Nel modello che presenteremo, la Banca Centrale deve prevedere il saggio di inflazione atteso da parte dell'economia, il saggio di inflazione atteso diviene un target intermedio nel

perseguire una politica di inflation targeting, si veda [59]. Assumendo che gli agenti aggiornino le loro opinioni tramite una regola di aspettative adattive, quale è la metodologia di stima da parte della Banca Centrale più appropriata al fine di garantire la convergenza all'equilibrio con aspettative razionali?

Le Banche Centrali, per prevedere l'inflazione attesa, fanno spesso riferimento nei loro modelli econometrici ad una regressione dell'inflazione attesa sui valori attesi in passato dal settore privato e sui valori storici dell'inflazione, si veda ad esempio [5, 6]. La centralità della previsione dell'inflazione nel perseguire una politica di inflation targeting da parte della Banca Centrale è posta con forza in numerosi lavori, si veda [22, 57, 13, 59, 63, 64]. In quello che segue analizzeremo tre diverse regole di formazione delle aspettative che si ispirano a queste ipotesi.

La nostra analisi si concentra sulla regione di stabilità dell'equilibrio con aspettative razionali rispetto ai coefficienti di memoria, delle regole di apprendimento della Banca Centrale e degli agenti dell'economia, al variare del target inflazione. L'analisi dei diversi meccanismi di apprendimento consegna risultati abbastanza simili. Se il target di inflazione è basso, allora l'equilibrio con aspettative razionali caratterizzato da quel saggio di inflazione risulta essere stabile per ogni coppia di parametri che descrivono i coefficienti di memoria dei meccanismi di apprendimento degli agenti. Se il target di inflazione è elevato, allora avremo convergenza all'equilibrio caratterizzato dall'inflazione obiettivo sotto alcune restrizioni; in particolare, nel caso in cui la Banca Centrale e l'economia utilizzino regole di apprendimento adattive dobbiamo richiedere che costoro abbiano memoria simile. Se la Banca Centrale e l'economia hanno coefficienti di memoria diversi, allora l'equilibrio sarà instabile.

I risultati di questo lavoro possono essere interpretati, almeno in parte, come una risposta alle perplessità messe in evidenza in [66, 13] riguardo all'utilizzo di una politica monetaria di inflation targeting che avesse come obiettivo intermedio il saggio di inflazione atteso. La risposta è la seguente: una politica di inflation targeting che ha a riferimento l'aspettativa del settore privato ha successo sotto l'ipotesi di razionalità limitata se il target non è troppo elevato e la Banca Centrale e l'economia hanno memoria simile.

Il lavoro è articolato nel seguente modo. Nella Sezione 3.1 presentiamo l'economia di riferimento. Nelle Sezioni 3.1.1-3.1.3 analizziamo l'economia considerando tre diverse regole di previsione delle aspettative del settore privato da parte della Banca Centrale.

3.1 Il modello

Consideriamo un'economia dove è presente un unico bene deperibile in regime di puro scambio. Il bene funge anche da moneta di scambio, si veda [11] per il modello. Sia M_t^s l'offerta di moneta al tempo t . Dato d_t , $t \geq 0$, il deficit di bilancio in termini reali finanziato con l'espansione della base monetaria al tempo t , l'offerta di moneta evolve in accordo con la seguente legge:

$$M_t^s = M_{t-1}^s + p_t d_t, \quad (3.1)$$

dove p_t è il prezzo al tempo t del bene. Sia m_t^d la domanda di moneta in termini reali. L'equilibrio nel mercato della moneta ($M_t^s = m_t^d p_t$) implica che

$$m_t^d p_t = m_{t-1}^d p_{t-1} + d_t p_t. \quad (3.2)$$

Tale condizione può essere riscritta come

$$m_t^d = \frac{m_{t-1}^d}{\pi_t} + d_t, \quad (3.3)$$

dove $\pi_t = \frac{p_t}{p_{t-1}}$ è il saggio d'inflazione al tempo t .

La domanda di moneta è del tipo di Cagan: funzione del saggio atteso di inflazione. Al fine di sviluppare con completezza la nostra analisi, restringiamo l'attenzione ad una domanda di moneta lineare:

$$m_t^d(\pi_{t+1}^e) = a(b - \pi_{t+1}^e), \quad (3.4)$$

dove $a > 0$, $b > 0$, e π_{t+1}^e rappresenta la previsione che gli agenti formulano al tempo t riguardo al tasso d'inflazione che si verificherà al tempo $t + 1$. Una domanda di moneta di questo tipo può essere microfondata tramite un modello di equilibrio economico in una economia a generazioni sovrapposte e funzione di utilità logaritmica.

L'autorità di Politica Monetaria (Banca Centrale) si pone un obiettivo di inflazione pari a π^* e determina d_t al fine di raggiungerlo. Coerentemente con larga parte della letteratura sul tema, ipotizziamo che la funzione di costo della Banca Centrale sia data dal valore atteso della somma dei quadrati delle differenze fra il rendimento del bene e il rendimento implicito nel saggio di inflazione obiettivo:

$$\min_{d_t} E^c \left[\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \left(\frac{1}{\pi_t} - \frac{1}{\pi^*} \right)^2 \right]$$

sotto il vincolo dato dalla (3.3). Questo tipo di funzione di costo è simile a quella ipotizzata in molti studi sull'analisi di politica monetaria, si veda ad esempio [59]; al fine di semplificare l'analisi abbiamo eliminato la componente che fa riferimento al reddito nazionale. La soluzione di questo problema è data dalla:

$$d_t^* = E_t^c[m_t^d] - \frac{m_{t-1}^d}{\pi^*}. \quad (3.5)$$

E_t^c è l'operatore che definisce le aspettative della Banca Centrale. La politica monetaria ottima (3.5) è condizionata dalla domanda di moneta al tempo $t-1$ e dipende dalle previsioni della Banca Centrale in merito alla domanda di moneta del settore privato.

Data la politica monetaria (3.5), il tasso d'inflazione in equilibrio diventa

$$\pi_t = \frac{m_{t-1}^d}{m_t^d - E_t^c[m_t^d] + \frac{m_{t-1}^d}{\pi^*}}$$

Assumiamo che la funzione di domanda di moneta sia stimata correttamente da parte della Banca Centrale, cioè, che i coefficienti a e b le siano noti. L'unica cosa che la Banca Centrale deve prevedere è l'aspettativa del settore privato. Il tasso d'inflazione atteso è un obiettivo intermedio della politica monetaria ottima.

Indicando con π_{t+1}^c la previsione da parte della Banca Centrale delle aspettative del settore privato, il tasso d'inflazione in equilibrio diviene

$$\pi_t = \pi^* \frac{b - \pi_t^e}{\pi^*(\pi_{t+1}^c - \pi_{t+1}^e) + b - \pi_t^e}.$$

A differenza di molta letteratura con aspettative razionali o con razionalità limitata, nel nostro modello il saggio di inflazione non dipende da una (generica) aspettativa di inflazione dell'economia ma dalla aspettativa di inflazione del settore privato e dalla valutazione, da parte della Banca Centrale, delle aspettative del settore privato. L'autorità di Politica Monetaria deve valutare il tasso d'inflazione atteso dagli agenti generando un problema del tipo "forecast the forecasts of the others" almeno in un senso, si veda [63, 64] per una analisi di questa interazione con informazione parziale in modelli stocastici. In [59], viene dimostrato che in un contesto di perfetta informazione-razionalità si ha $\pi_{t+1}^e = \pi^*$. L'unico valore delle aspettative di

inflazione coerente con la condizione di perfect foresight e con il raggiungimento in equilibrio di un saggio di inflazione pari a π^* è esattamente π^* . In [11], un modello di questo tipo con razionalità limitata è stato analizzato ipotizzando che il settore privato e la Banca Centrale esprimano la medesima aspettativa.

In quanto segue, studieremo la dinamica dell'economia nel caso in cui gli agenti e la Banca Centrale sono caratterizzati da razionalità limitata; assumeremo che il settore privato aggiorni le proprie aspettative attraverso un comportamento di tipo adattivo e che l'Autorità Monetaria riveda la sua stima delle aspettative del settore privato utilizzando meccanismi ricorsivi di tipo adattivo.

Per quanto riguarda il settore privato, assumeremo il classico schema di apprendimento adattivo:

$$\pi_{t+1}^e = (1 - \alpha) \pi_t^e + \alpha \pi^* \frac{b - \pi_{t-1}^e}{\pi^*(\pi_t^c - \pi_t^e) + b - \pi_{t-1}^e}. \quad (3.6)$$

Considereremo tre differenti meccanismi ricorsivi per la Banca Centrale, dipendenti dalle informazioni disponibili al tempo t . La Banca sa che gli agenti si comportano seguendo una regola di apprendimento adattivo. Nel primo caso ipotizziamo che la Banca Centrale conosca al tempo t solo il tasso d'inflazione π_t e si comporti esattamente come il settore privato utilizzando una regola di apprendimento adattivo. Nel secondo e nel terzo caso assumiamo che la Banca Centrale conosca al tempo t la previsione che il settore privato ha formulato riguardo a π_t , cioè π_t^e . Con il secondo meccanismo ipotizziamo che la Banca Centrale stimi l'aspettativa del settore privato come una media geometrica delle aspettative degli agenti in passato. Nel terzo meccanismo la Banca Centrale replica fedelmente il comportamento del settore privato (con un passo di apprendimento non necessariamente eguale). In dettaglio le regole di apprendimento sono:

•

$$\pi_{t+1}^c = (1 - \gamma) \pi_t^c + \gamma \pi^* \frac{b - \pi_{t-1}^e}{\pi^*(\pi_t^c - \pi_t^e) + b - \pi_{t-1}^e}, \quad (3.7)$$

•

$$\pi_{t+1}^c = (1 - \gamma) \pi_t^c + \gamma \pi_t^e, \quad (3.8)$$

•

$$\pi_{t+1}^c = (1 - \gamma) \pi_t^e + \gamma \pi^* \frac{b - \pi_{t-1}^e}{\pi^* (\pi_t^c - \pi_t^e) + b - \pi_{t-1}^e}. \quad (3.9)$$

Il disegno di una politica monetaria sopra delineato è motivato dalla esperienza pratica delle Banche Centrali, i cui uffici studi hanno tra i loro compiti di primaria importanza quello della valutazione delle aspettative di inflazione del settore privato. A questo fine, modelli econometrici ispirati da regole di apprendimento adattive e indagini campionarie vengono spesso utilizzate, si veda ad esempio [5, 6].

Le tre regole di apprendimento possono essere interpretate nel senso di essere via via più raffinate. La prima ipotizza che la Banca Centrale non conosca il valore atteso dell'inflazione al tempo t da parte dell'economia privata. La seconda e la terza ipotizzano che la Banca Centrale lo conosca e lo utilizzi per prevedere il saggio atteso futuro tramite una semplice media geometrica delle aspettative in passato degli agenti o tramite la regola adattiva. Quest'ultimo sembra essere lo schema di apprendimento più raffinato. Nelle tre sezioni che seguono analizzeremo la dinamica dei tre modelli per le aspettative. Si noti che (3.6) e (3.9) differiscono esclusivamente per il passo di apprendimento.

Le tre regole di apprendimento possono essere interpretate come medie geometriche dei valori storici dell'inflazione (primo e terzo caso) e dei valori attesi degli agenti (secondo caso). Il fattore della media geometrica è $1 - \gamma$ e $1 - \alpha$. Questa interpretazione fa sì che $1 - \gamma$ e $1 - \alpha$ rappresentino un indice della memoria presente nei meccanismi di apprendimento degli agenti.

Nell'analisi che segue faremo riferimento a $b, \pi^* \in \mathbb{R}_+$. La discussione della dinamica dei modelli si concentrerà soprattutto sull'insieme dei valori dei parametri che prevedono in equilibrio una domanda positiva da parte dell'economia ($b > \pi^*$) ed un saggio di inflazione maggiore di uno ($\pi^* > 1$).

3.1.1 Modello 1

Assumiamo che la Banca Centrale conosca, al tempo t , soltanto il tasso di inflazione π_t e assuma contemporaneamente che il settore privato utilizzi uno schema di apprendimento adattivo per aggiornare le previsioni relative al periodo successivo. Date le informazioni in suo possesso, l'Autorità di Politica Monetaria replica il meccanismo di apprendimento degli agenti seguendo la (3.7).

L'evoluzione delle aspettative della Banca Centrale e dell'economia sono date da:

$$\pi_{t+1}^e = (1 - \alpha) \pi_t^e + \alpha \pi^* \frac{b - \pi_{t-1}^e}{\pi^*(\pi_t^c - \pi_t^e) + b - \pi_{t-1}^e} \quad (3.10a)$$

$$\pi_{t+1}^c = (1 - \gamma) \pi_t^c + \gamma \pi^* \frac{b - \pi_{t-1}^e}{\pi^*(\pi_t^c - \pi_t^e) + b - \pi_{t-1}^e}. \quad (3.10b)$$

Ponendo $x_t = \pi_{t-1}^e$, $y_t = \pi_t^e$ e $z_t = \pi_t^c$, abbiamo

$$T_1 = \begin{cases} x_{t+1} = y_t \\ y_{t+1} = (1 - \alpha) y_t + \alpha \pi^* \frac{b - x_t}{\pi^*(z_t - y_t) + b - x_t} \\ z_{t+1} = (1 - \gamma) z_t + \gamma \pi^* \frac{b - x_t}{\pi^*(z_t - y_t) + b - x_t}. \end{cases} \quad (3.11)$$

Si verifica facilmente che $E^* = (\pi^*, \pi^*, \pi^*)$ costituisce l'unico equilibrio temporaneo stazionario. Posto $C = \frac{\pi^{*2}}{b - \pi^*}$, la matrice Jacobiana calcolata nell'equilibrio è:

$$J_{T_1}(\pi^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha + \alpha C & -\alpha C \\ 0 & \gamma C & 1 - \gamma - \gamma C \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Poiché la prima colonna ha tutte le componenti uguali a zero, uno degli autovalori è sempre uguale a 0 e gli altri due sono determinati univocamente dalla sottomatrice ottenuta eliminando da $J_{T_1}(\pi^*)$ la prima riga e la prima colonna. Per tracciare il diagramma di biforcazione rispetto a α e γ è quindi sufficiente studiare la sottomatrice

$$J_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha + \alpha C & -\alpha C \\ \gamma C & 1 - \gamma - \gamma C \end{pmatrix}$$

procedendo attraverso l'analisi delle relazioni fra traccia e determinante.

In primo luogo analizziamo la natura (reale o complessa) degli autovalori. Dalla condizione $Tr^2(J_{(1,1)}) - 4Det(J_{(1,1)}) < 0$, che significa autovalori reali, si ottiene:

$$\alpha^2 (1 - C)^2 - \alpha [2\gamma (1 + C^2)] + \gamma^2 (1 + C)^2 < 0. \quad (3.13)$$

Il polinomio di secondo grado ammette le radici $\alpha_{1,2} = \left[\gamma, \gamma \left(\frac{1+C}{1-C} \right)^2 \right]$. La disuguaglianza risulta soddisfatta, per $\alpha, \gamma \in (0, 1)$, nei seguenti casi:

$$1.1. \quad \gamma \left(\frac{1+C}{1-C} \right)^2 < \alpha < \gamma \text{ se } C < 0,$$

$$1.2. \quad \gamma < \alpha < \gamma \left(\frac{1+C}{1-C} \right)^2 \text{ se } C > 0,$$

mentre per $C = 0$ non si hanno autovalori complessi.

Al fine di determinare il luogo geometrico associato alla biforcazione di Neimark-Hopf, dobbiamo valutare la regione in cui

$$Det \left(J_{(1,1)} \right) = 1 - \gamma(1+C) - \alpha(1-\gamma-C) > 1.$$

Da questa si ottiene ($\gamma \neq 1 - C$):

$$1.3. \quad \alpha > \frac{\gamma(1+C)}{\gamma+C-1} \text{ se } \gamma > 1 - C$$

$$1.4. \quad \alpha < \frac{\gamma(1+C)}{\gamma+C-1} \text{ se } \gamma < 1 - C.$$

Il caso $\gamma = 1 - C$ non è interessante essendo $\alpha, \gamma \in (0, 1)$. Il luogo dei punti in cui si può verificare la biforcazione di Neimark-Hopf è rappresentato quindi da un'iperbole con asintoti in $1 - C$ (verticale) e $1 + C$ (orizzontale). Le due regioni individuate in 1.3 e 1.4 appartengono alla regione significativa dei parametri rispettivamente per $C > 1$ e $C < -1$.

Dalla $Tr \left(J_{(1,1)} \right) > Det \left(J_{(1,1)} \right) + 1$, si ottiene $0 > \alpha\gamma$ che non è mai soddisfatta nella regione di interesse. Quindi per valori significativi dei parametri non abbiamo una biforcazione Pitchfork.

Per determinare il luogo geometrico associato alla biforcazione Flip, dobbiamo valutare la regione per cui $Tr \left(J_{(1,1)} \right) < -Det \left(J_{(1,1)} \right) - 1$, disequaglianza che ci conduce alla seguente:

$$2 - \alpha(1 - C) - \gamma(1 + C) < -1 + \gamma(1 + C) + \alpha(1 - \gamma - C) + 1.$$

Qualora $\gamma \neq 2 - 2C$, si danno due casi:

$$1.5. \quad \alpha < \frac{2\gamma(1+C)-4}{\gamma+2C-2} \text{ se } \gamma > 2 - 2C$$

$$1.6. \quad \alpha > \frac{2\gamma(1+C)-4}{\gamma+2C-2} \text{ se } \gamma < 2 - 2C.$$

Il caso $\gamma = 2 - 2C$ non è interessante essendo $\alpha, \gamma \in (0, 1)$.

Il luogo dei punti in cui si verifica la biforcazione Flip è individuato da un'iperbole con asintoti in $2 - 2C$ (verticale) e $2 + 2C$ (orizzontale). Come nel caso della biforcazione Neimark, le condizioni 1.5 e 1.6 possono verificarsi nella regione significativa dei parametri rispettivamente per $C > 1$ e $C < -1$.

La stabilità-instabilità dell'equilibrio con aspettative razionali e i luoghi delle biforcazioni di Neimark e Flip sono rappresentati nella seguente Proposizione.

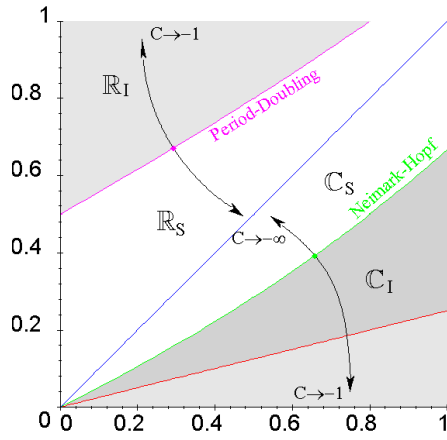
Proposizione 3.1 *Il punto fisso $E^* = (\pi^*, \pi^*, \pi^*)$ della mappa T_1 possiede le seguenti proprietà di stabilità locale per $\alpha, \gamma \in (0, 1)$:*

a) *Per $-1 \leq C \leq 1$, l'equilibrio E^* è stabile per ogni coppia (α, γ) , se $C \neq 0$ esistono coppie (α, γ) per le quali gli autovalori di $J_{(1,1)}$ sono complessi;*

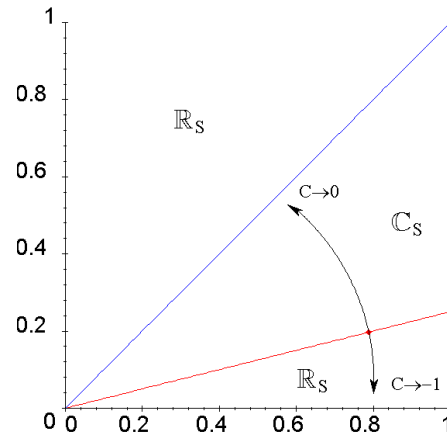
b) *Per $C < -1$, l'equilibrio E^* può perdere stabilità attraverso una biforcazione Flip e diventa instabile se $\alpha > \frac{2\gamma(1+C)-4}{\gamma+2C-2}$, oppure attraverso una biforcazione di Neimark-Hopf con instabilità per $\alpha < \frac{\gamma(1+C)}{\gamma+C-1}$;*

c) *Per $C > 1$, l'equilibrio E^* può perdere stabilità attraverso una biforcazione Flip e diventa instabile se $\alpha < \frac{2\gamma(1+C)-4}{\gamma+2C-2}$, oppure attraverso una biforcazione di Neimark-Hopf con instabilità per $\alpha > \frac{\gamma(1+C)}{\gamma+C-1}$.*

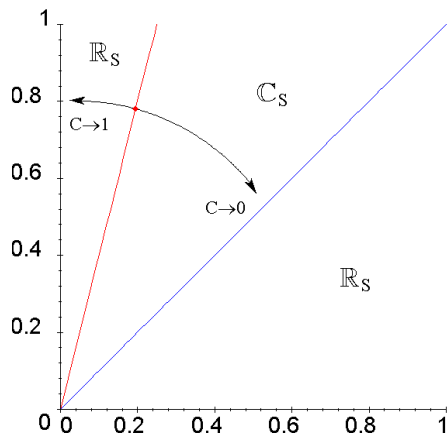
Graficamente, i risultati contenuti nella Proposizione 3.1 sono rappresentati nelle quattro figure che seguono. In queste figure sono illustrati i diagrammi di biforcazione dei sistemi dinamici relativi a valori del parametro C rappresentativi dei tre casi. Sull'asse delle ascisse sono indicati i valori di γ , mentre l'asse delle ordinate è riferito ad α . Con \mathbb{R} e \mathbb{C} , sono indicate le regioni in cui gli autovalori del sistema dinamico in corrispondenza dell'equilibrio sono reali o complessi. I pedici S e I indicano rispettivamente le regioni in cui E^* è stabile e instabile. Le frecce rappresentano gli spostamenti delle curve che delimitano le diverse regioni del piano al variare di C . In particolare, nel caso $C > 1$, la curva $\alpha = \frac{2\gamma(1+C)-4}{\gamma+2C-2}$, lungo la quale si verifica la biforcazione Flip, si sposta verso destra quando $C \rightarrow 1$ ed esce successivamente dalla regione interessante del piano dopo essere passata per il punto $(1, 0)$ quando $C = 1$; viceversa per $C \rightarrow +\infty$ la curva si approssima alla retta $\alpha = \gamma$, cosicché al limite, l'equilibrio di perfetta previsione risulta instabile per ogni $\alpha < \gamma$.



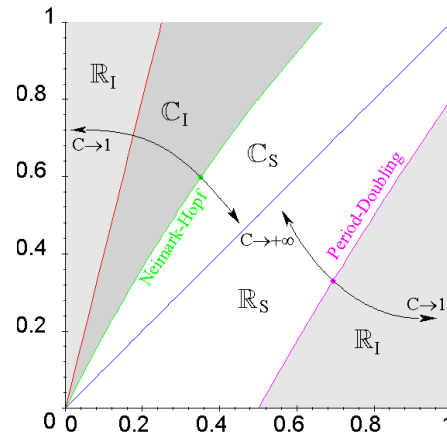
$C = -3.$



$C = -\frac{1}{3}.$



$C = \frac{1}{3}$



$C = 3.$

Contemporaneamente, la curva $\alpha = \frac{\gamma(1+C)}{\gamma+C-1}$, relativa alla biforcazione Neimark-Hopf, si sposta verso sinistra quando $C \rightarrow 1$ ed esce successivamente dalla regione interessante del piano dopo essere passata per $(0, 1)$ quando $C = 1$; viceversa per $C \rightarrow +\infty$ la curva si approssima alla retta $\alpha = \gamma$ e quindi al limite, l'equilibrio di perfetta previsione risulta instabile per ogni $\alpha > \gamma$. Per $C \rightarrow +\infty$ l'equilibrio è instabile $\forall(\alpha, \gamma)$ tali che $\alpha \neq \gamma$. Osserviamo che quando $C \rightarrow +\infty$ anche la retta $\alpha = \gamma \left(\frac{1+C}{1-C}\right)^2$ tende alla $\alpha = \gamma$, facendo così diminuire (e al limite scomparire) la regione in cui si

hanno due autovalori complessi coniugati. Il caso $C < -1$ è simmetrico al precedente.

Risulta difficile stabilire la natura delle due biforcazioni (subcritiche o supercritiche), l'analisi formale attraverso la riduzione alla varietà centrale travalica gli scopi di questo lavoro, una analisi via simulazione non risulta essere conclusiva.

Queste tre regioni per C possono essere interpretate rispetto ai parametri b e π^* . Restringendo la nostra attenzione al quadrante positivo $b, \pi^* > 0$ abbiamo:

- I. $C < -1$ significa $b < \pi^*$ e $b > \pi^*(1 - \pi^*)$,
- II. $-1 < C < 0$ significa $b < \pi^*$ e $b < \pi^*(1 - \pi^*)$,
- III. $C > 1$ significa $b > \pi^*$ e $b < \pi^*(1 + \pi^*)$,
- IV. $0 < C < 1$ significa $b > \pi^*$ e $b > \pi^*(1 + \pi^*)$.

Le diverse regioni sono descritte nella figura 3.1. Restringendo l'analisi a

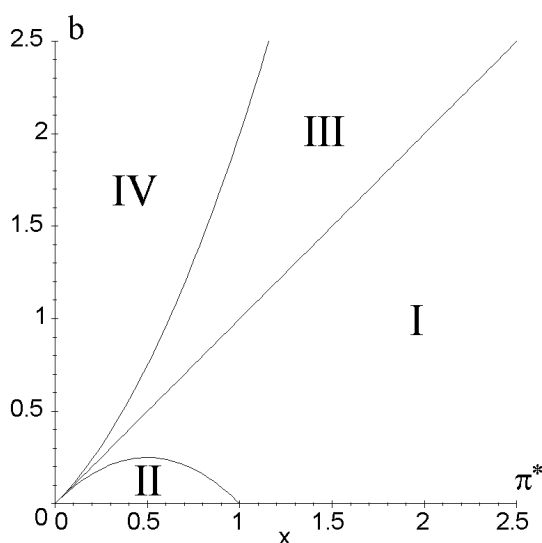


Figura 3.1:

$b > \pi^*$ (domanda positiva in equilibrio), abbiamo alcuni interessanti risultati-osservazioni:

- Per b elevato e π^* piccolo ($b > \pi^*(1 + \pi^*)$), l'equilibrio risulta essere stabile per ogni coefficiente di apprendimento-memoria degli agenti e della Banca Centrale.
- Nel caso di cui sopra abbiamo una dinamica non oscillatoria dell'inflazione per $\alpha < \gamma$ (la Banca Centrale ha più memoria del settore privato) ed una dinamica oscillatoria per $\alpha > \gamma$. Al crescere di b o al diminuire di π^* , la regione dalla dinamica oscillatoria diminuisce e al limite tende a scomparire.
- Se $\pi < b < \pi^*(1 + \pi^*)$, allora abbiamo stabilità se la Banca Centrale e l'economia hanno il medesimo passo di apprendimento ($\alpha = \gamma$). In generale, l'equilibrio sarà stabile se i fattori che descrivono la memoria dei due processi di apprendimento sono simili, altrimenti l'equilibrio sarà instabile. Le regioni di instabilità tendono a scomparire nel caso in cui b aumenta e tende a $\pi^*(1 + \pi^*)$.
- A differenza di quanto osservato in una economia in cui il settore privato e la Banca Centrale formulano le medesime aspettative, si veda [11], una maggiore componente di memoria non comporta una maggiore stabilità dell'equilibrio, quello che risulta essere rilevante è che il settore privato e la Banca Centrale abbiano memoria simile.
- Contrariamente a quanto osservato in [11], per $\pi < b < \pi^*(1 + \pi^*)$ esiste un intervallo $A = (1 - \epsilon, 1]$ ($\epsilon > 0$) tale che per $\gamma, \alpha \in A$ (memoria poco elevata) l'equilibrio è stabile.

3.1.2 Modello 2

Consideriamo il caso in cui la Banca Centrale conosca al tempo t le previsioni che il settore privato ha formulato riguardo a π_t , cioè π_t^e , e utilizzi, essa stessa, un meccanismo di apprendimento adattivo secondo cui la previsione del settore privato è una media pesata (con pesi decrescenti geometricamente) delle previsioni storiche degli agenti.

L'evoluzione delle aspettative della Banca Centrale e dell'economia sono date da:

$$\pi_{t+1}^e = (1 - \alpha) \pi_t^e + \alpha \pi^* \frac{b - \pi_{t-1}^e}{\pi^*(\pi_t^c - \pi_t^e) + b - \pi_{t-1}^e} \quad (3.14a)$$

$$\pi_{t+1}^c = (1 - \gamma) \pi_t^c + \gamma \pi_t^e. \quad (3.14b)$$

Ponendo $x_t = \pi_{t-1}^e$, $y_t = \pi_t^e$ e $z_t = \pi_t^c$, abbiamo

$$T_2 = \begin{cases} x_{t+1} = y_t \\ y_{t+1} = (1 - \alpha)y_t + \alpha\pi^* \frac{b-x_t}{\pi^*(z_t-y_t)+b-x_t} \\ z_{t+1} = (1 - \gamma)z_t + \gamma y_t. \end{cases} \quad (3.15)$$

Come nel caso precedente si verifica che $E^* = (\pi^*, \pi^*, \pi^*)$ è l'unico equilibrio temporaneo stazionario. La matrice Jacobiana calcolata nell'equilibrio è:

$$J_{T_2}(\pi^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha + \alpha C & -\alpha C \\ 0 & \gamma & 1 - \gamma \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Uno degli autovalori è sempre uguale a 0, gli altri due sono determinati univocamente dalla sottomatrice ottenuta eliminando da $J_{T_2}(\pi^*)$ la prima riga e la prima colonna. Per tracciare il diagramma di biforcazione rispetto a α e γ , è sufficiente studiare la sottomatrice

$$J_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha + \alpha C & -\alpha C \\ \gamma & 1 - \gamma \end{pmatrix}.$$

Consideriamo in primo luogo la natura (reale o complessa) degli autovalori. Dalla condizione $Tr^2(J_{(1,1)}) - 4Det(J_{(1,1)}) < 0$ si ottiene:

$$\alpha^2(1 - C)^2 - 2\alpha\gamma(1 + C) + \gamma^2 < 0. \quad (3.17)$$

Il polinomio di secondo grado per $C \neq 1$ ammette le radici

$$\alpha_{1,2} = \left[\gamma \left(\frac{1}{1 + \sqrt{C}} \right)^2, \gamma \left(\frac{1}{1 - \sqrt{C}} \right)^2 \right]$$

quindi esistono soluzioni reali della disuguaglianza solo per $C > 0$. In tal caso, la disuguaglianza è soddisfatta per valori compresi fra le due radici, nella regione $\alpha, \gamma \in (0, 1)$ abbiamo:

2.1. $\gamma \left(\frac{1}{1 + \sqrt{C}} \right)^2 < \alpha < \gamma \left(\frac{1}{1 - \sqrt{C}} \right)^2$ per $C \neq 1$

2.2. $\alpha > \frac{\gamma}{4}$ per $C = 1$.

Per determinare il luogo geometrico di una biforcazione di Neimark-Hopf, poniamo $Det \left(J_{(1,1)} \right) > 1$: $(1 - \alpha)(1 - \gamma) + \alpha C > 1$. Per $\gamma \neq 1 - C$ si ottiene:

$$2.3. \alpha > \frac{\gamma}{\gamma + C - 1} \text{ se } \gamma > 1 - C,$$

$$2.4. \alpha < \frac{\gamma}{\gamma + C - 1} \text{ se } \gamma < 1 - C.$$

Il caso $\gamma = 1 - C$ restituisce la condizione $\gamma < 0$, fuori della regione dei parametri significativi. Il luogo dei punti in cui si può verificare la biforcazione di Neimark-Hopf è individuato quindi da un'iperbole con asintoti in $1 - C$ (quello verticale) e 1 (quello orizzontale). Soltanto la condizione 2.3 può essere soddisfatta nella regione significativa dei parametri α e γ con $C > 1$.

Anche in questo caso, la biforcazione Pitchfork non si può manifestare per valori di α e γ appartenenti all'intervallo $(0, 1)$. Dalla condizione $Tr \left(J_{(1,1)} \right) > Det \left(J_{(1,1)} \right) + 1$ si ottiene infatti $\alpha\gamma < 0$.

Dalla $Tr \left(J_{(1,1)} \right) < -Det \left(J_{(1,1)} \right) - 1$ si ottiene: $\alpha(\gamma + 2C - 2) < 2\gamma - 4$. Posto $\gamma \neq 2 - 2C$, abbiamo:

$$2.5. \alpha < \frac{2\gamma - 4}{\gamma + 2C - 2} \text{ se } \gamma > 2 - 2C,$$

$$2.6. \alpha > \frac{2\gamma - 4}{\gamma + 2C - 2} \text{ se } \gamma < 2 - 2C.$$

Il caso $\gamma = 2 - 2C$ restituisce la condizione $\gamma > 2$, fuori della regione dei parametri significativi. Il luogo dei punti in cui si verifica la biforcazione Flip è individuato quindi da un'iperbole con asintoti in $\gamma = 2 - 2C$ e $\alpha = 2$. Solo la condizione 2.6 può verificarsi nella regione significativa dei parametri per $C < -\frac{1}{2}$.

La stabilità-instabilità dell'equilibrio con aspettative razionali e i luoghi delle biforcazioni di Neimark e Flip sono rappresentati nella seguente Proposizione.

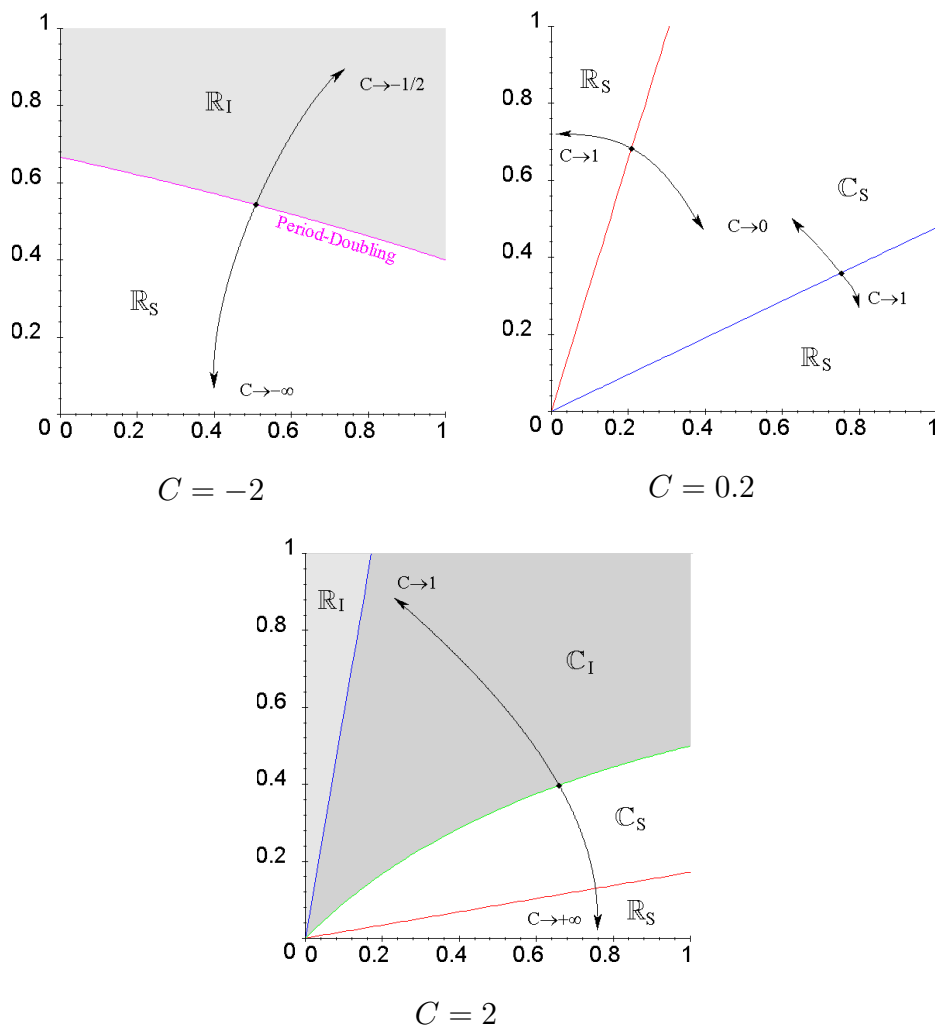
Proposizione 3.2 *Il punto fisso $E^* = (\pi^*, \pi^*, \pi^*)$ della mappa T_2 possiede le seguenti proprietà di stabilità locale per $\alpha, \gamma \in (0, 1)$:*

a) *Per $-\frac{1}{2} \leq C \leq 1$, l'equilibrio E^* è stabile per ogni coppia (α, γ) , se $C \neq 0$ esistono coppie (α, γ) per le quali gli autovalori di $J_{(1,1)}$ sono complessi.*

b) *Per $C < -\frac{1}{2}$, l'equilibrio E^* può perdere stabilità attraverso una biforcazione Flip e diventa instabile se $\alpha > \frac{2\gamma - 4}{\gamma + 2C - 2}$.*

c) Per $C > 1$, l'equilibrio E^* può perdere stabilità attraverso una biforcazione di Neimark-Hopf con instabilità per $\alpha > \frac{\gamma}{\gamma+C-1}$.

I risultati contenuti nella Proposizione 3.2 sono rappresentati nelle tre figure seguenti.



In esse sono illustrati i diagrammi di biforcazione relativi alle mappe associate a valori del parametro C rappresentativi dei tre casi. Nel caso $C < -\frac{1}{2}$, la curva $\alpha = \frac{2\gamma-4}{\gamma+2C-2}$ lungo la quale si verifica la biforcazione Flip, si sposta verso l'alto quando $C \rightarrow -\frac{1}{2}$ ed esce successivamente dalla regione

del piano $\{(0, 1) \times (0, 1)\}$ dopo essere passata per $(1, 1)$ quando $C = -\frac{1}{2}$; viceversa per $C \rightarrow -\infty$ la curva si approssima alla retta $\alpha = 0$ cosicché, al limite, il punto di equilibrio di perfetta previsione sarà instabile in tutta la regione $\alpha > 0$.

Contemporaneamente la curva $\alpha = \frac{\gamma}{\gamma+C-1}$, relativa alla biforcazione Neimark-Hopf, si sposta verso l'alto quando $C \rightarrow 1$ tendendo (al limite) alla spezzata ottenuta unendo l'asse delle ordinate con la retta $\alpha = 1$; viceversa per $C \rightarrow +\infty$ la curva si approssima alla retta $\alpha = 0$ e quindi, al limite, l'equilibrio di perfetta previsione risulta instabile per ogni $\alpha < \gamma$. Per $C \rightarrow -\infty$, le rette $\alpha = \gamma \left(\frac{1}{1+\sqrt{C}} \right)$ e $\alpha = \gamma \left(\frac{1}{1-\sqrt{C}} \right)$ tendono alla $\alpha = 0$, facendo così diminuire (e al limite scomparire) la regione in cui si hanno due autovalori complessi coniugati. Il caso $-1 < C < 1$ non presenta biforcazioni; per $C > 0$ si hanno autovalori complessi in una regione che diventa man mano più ampia quando $C \rightarrow 1$.

Queste tre regioni per C possono essere interpretate rispetto ai parametri b e π^* rendendo esplicita la relazione fra la stabilità dell'equilibrio e l'obiettivo di politica monetaria al variare del coefficiente b . Restrungendo l'attenzione al quadrante positivo $b, \pi^* > 0$, abbiamo:

- I. $C < -\frac{1}{2}$ significa $b < \pi^*$ e $b > \pi^*(1 - 2\pi^*)$,
- II. $-\frac{1}{2} < C < 0$ significa $b < \pi^*$ e $b < \pi^*(1 - 2\pi^*)$,
- III. $C > 1$ significa $b > \pi^*$ e $b < \pi^*(1 + \pi^*)$,
- IV. $0 < C < 1$ significa $b > \pi^*$ e $b > \pi^*(1 + \pi^*)$.

Le regioni sono descritte nella figura 3.2.

Restrungendo l'analisi a $b > \pi^*$, abbiamo alcuni interessanti risultati:

- Per b elevato rispetto a π^* ($b > \pi^*(1 + \pi^*)$), l'equilibrio risulta essere stabile per ogni coefficiente di apprendimento-memoria degli agenti e della Banca Centrale.
- Nel caso di cui sopra abbiamo una dinamica non oscillatoria per passi di apprendimento diversi fra loro (γ molto più grande di α o viceversa) ed un andamento oscillatorio altrimenti. Al crescere di b o al diminuire di π^* abbiamo che la regione dalla dinamica oscillatoria diminuisce e al limite tende a scomparire.

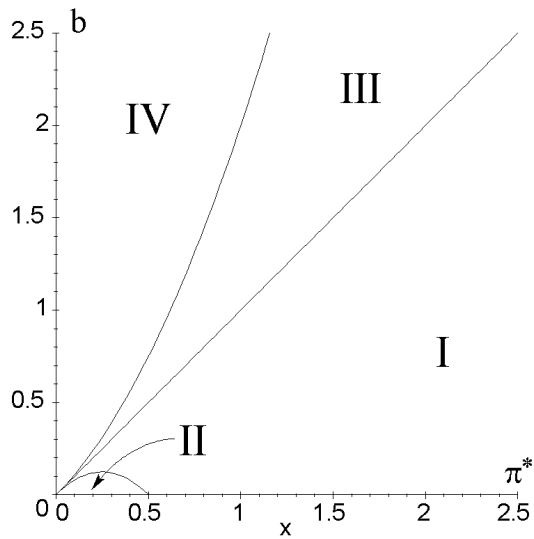


Figura 3.2:

- Se $\pi < b < \pi^*(1 + \pi^*)$, allora abbiamo stabilità se l'economia ha un passo di apprendimento (α) piccolo. In generale, l'equilibrio sarà stabile se gli agenti hanno molta memoria rispetto alle realizzazioni dell'inflazione occorse in passato, altrimenti l'equilibrio sarà instabile.
- A differenza di quanto osservato nel caso precedente, con riferimento al caso di cui sopra, il fatto che il settore privato e la Banca Centrale abbiano passi di apprendimento simili non comporta stabilità dell'equilibrio. La stabilità dell'equilibrio è garantita se gli agenti hanno molta memoria e la Banca Centrale prende l'ultima aspettativa del settore privato come un indicatore dell'aspettativa futura da parte del settore privato.

A differenza di quanto stabilito nel modello precedente, i risultati di questo modello sono in linea con quanto stabilito nel caso di aspettative omogenee in [11]. La ragione di questo è da rintracciare nel fatto che in questo sistema dinamico solo gli agenti sperimentano effettivamente un processo di apprendimento.

3.1.3 Modello 3

Nell'ipotesi che la Banca Centrale conosca la previsione che il settore privato ha formulato riguardo a π_t , cioè π_t^e , e sappia che l'economia segue un comportamento di tipo adattivo nell'aggiornare le proprie aspettative, allora si può ipotizzare che la Banca Centrale replichi il meccanismo di apprendimento degli agenti per anticiparne le decisioni. L'evoluzione delle aspettative della Banca Centrale e dell'economia è rappresentata da:

$$\pi_{t+1}^e = (1 - \alpha) \pi_t^e + \alpha \pi^* \frac{b - \pi_{t-1}^e}{\pi^*(\pi_t^c - \pi_t^e) + b - \pi_{t-1}^e} \quad (3.18a)$$

$$\pi_{t+1}^c = (1 - \gamma) \pi_t^c + \gamma \pi^* \frac{b - \pi_{t-1}^e}{\pi^*(\pi_t^c - \pi_t^e) + b - \pi_{t-1}^e}. \quad (3.18b)$$

Ponendo $x_t = \pi_{t-1}^e$, $y_t = \pi_t^e$ e $z_t = \pi_t^c$, otteniamo

$$T_3 = \begin{cases} x_{t+1} = y_t \\ y_{t+1} = (1 - \alpha) y_t + \alpha \pi^* \frac{b - x_t}{\pi^*(z_t - y_t) + b - x_t} \\ z_{t+1} = (1 - \gamma) y_t + \gamma \pi^* \frac{b - x_t}{\pi^*(z_t - y_t) + b - x_t}. \end{cases} \quad (3.19)$$

$E^* = (\pi^*, \pi^*, \pi^*)$ si dimostra essere l'unico equilibrio temporaneo stazionario. La matrice Jacobiana calcolata nell'equilibrio è:

$$J_{T_3}(\pi^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha + \alpha C & -\alpha C \\ 0 & 1 - \gamma + \gamma C & -\gamma C \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Uno degli autovalori è sempre uguale a 0. Per tracciare il diagramma di biforcazione rispetto ai coefficienti di memoria degli agenti e dell'Autorità di Politica Monetaria, è sufficiente studiare la sottomatrice

$$J_{(1,1)} \begin{pmatrix} 1 - \alpha + \alpha C & -\alpha C \\ 1 - \gamma + \gamma C & -\gamma C \end{pmatrix}$$

procedendo attraverso l'analisi delle relazioni fra traccia e determinante.

In primo luogo analizziamo la natura (reale o complessa) degli autovalori. Dalla condizione $Tr^2(J_{(1,1)}) - 4Det(J_{(1,1)}) < 0$ si ottiene:

$$\alpha^2 (1 - C)^2 - 2\alpha [1 + C - \gamma C + \gamma C^2] + (1 + \gamma C)^2 < 0 \quad (3.21)$$

che, sotto la condizione $4C(1 - \gamma + \gamma C) > 0$, risulta essere verificata nei seguenti casi:

$$3.1. \frac{(1+C-\gamma C+\gamma C^2)-2\sqrt{C(1-\gamma+\gamma C)}}{(1-C)^2} < \alpha < \frac{(1+C-\gamma C+\gamma C^2)+2\sqrt{C(1-\gamma+\gamma C)}}{(1-C)^2} \text{ per } C \neq 1,$$

$$3.2. \alpha > \left(\frac{1+\gamma}{2}\right)^2 \text{ per } C = 1.$$

Si tratta (a meno di casi degeneri) di parabole, come è facile verificare attraverso il determinante della matrice associata alla forma quadratica.

Per determinare quando si verifica una biforcazione di Neimark-Hopf, dobbiamo valutare $Det\left(J_{(1,1)}\right) > 1$. Dalla $(\alpha - \gamma)C > 1$, posto $C \neq 0$, si ottiene

$$3.3. \alpha > \frac{1}{C} + \gamma \text{ se } C > 0,$$

$$3.4. \alpha < \frac{1}{C} + \gamma \text{ se } C < 0.$$

Il caso $C = 0$ non è interessante poiché non si hanno autovalori complessi per $\alpha, \gamma \in (0, 1)$.

Il luogo dei punti in cui si può verificare la biforcazione di Neimark-Hopf è individuato quindi da una retta la cui ordinata nell'origine è parametrizzata da C . Le condizioni 3.3 e 3.4 possono verificarsi nella regione significativa dei parametri per $C > 1$ e $C < -1$, rispettivamente.

Dalla $Tr\left(J_{(1,1)}\right) > Det\left(J_{(1,1)}\right) + 1$ si ottiene $\alpha < 0$ che non risulta essere significativa. Quindi la biforcazione Pitchfork non è ottenuta nella regione di interesse.

Infine verifichiamo la presenza di biforcazioni di tipo Flip. Dalla $Tr\left(J_{(1,1)}\right) < -Det\left(J_{(1,1)}\right) - 1$ si ottiene $2 - \alpha + 2\alpha C - 2\gamma C < 0$, da cui:

$$3.5. \alpha < \frac{2\gamma C - 2}{2C - 1} \text{ se } C > \frac{1}{2},$$

$$3.6. \alpha > \frac{2\gamma C - 2}{2C - 1} \text{ se } C < \frac{1}{2}.$$

Il caso $C = \frac{1}{2}$ non è interessante poiché impone $\gamma > 2$.

Come per la Neimark-Hopf, anche il luogo dei punti in cui si verifica la biforcazione Flip è individuato da una retta dal coefficiente angolare e ordinata nell'origine parametrizzati da C . Tale retta passa per il punto $(2, 2)$ e il suo coefficiente angolare tende a 1 quando $C \rightarrow \pm\infty$ e a $-\infty$ quando $C \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-$, mentre tende a $+\infty$ quando $C \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+$. È immediato verificare

che le condizioni 3.5 e 3.6 possono verificarsi nella regione significativa dei parametri per $C > 1$ e $C < -\frac{1}{2}$, rispettivamente.

La stabilità-instabilità dell'equilibrio con aspettative razionali e i luoghi delle biforcazioni di Neimark e Flip sono rappresentati nella seguente Proposizione.

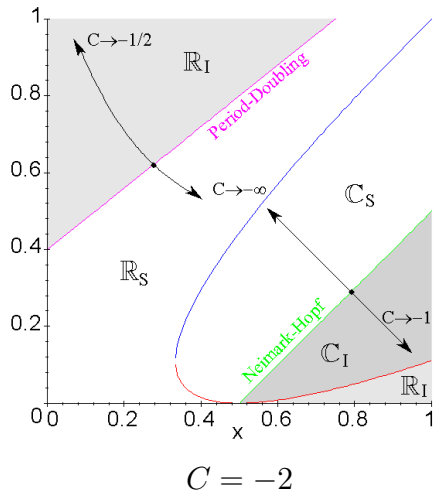
Proposizione 3.3 *Il punto fisso $E^* = (\pi^*, \pi^*, \pi^*)$ della mappa T_1 possiede le seguenti proprietà di stabilità locale per $\alpha, \gamma \in (0, 1)$:*

a) *Per $-\frac{1}{2} \leq C \leq 1$, l'equilibrio E^* è stabile per ogni coppia (α, γ) , se $C \neq 0$ esistono coppie (α, γ) per le quali gli autovalori di $J_{(1,1)}$ sono complessi;*

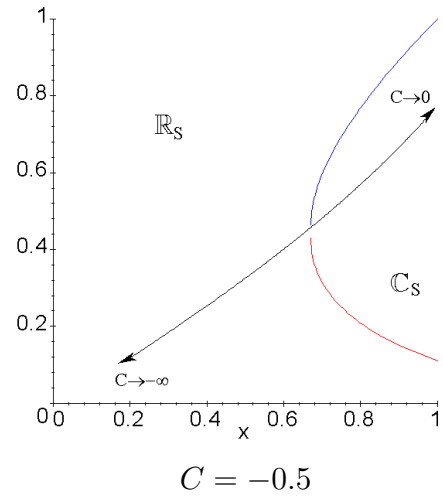
b) *Per $C < -\frac{1}{2}$, l'equilibrio E^* può perdere stabilità attraverso una biforcazione Flip e diventa instabile se $\alpha > \frac{2\gamma C - 2}{2C - 1}$, oppure attraverso una biforcazione di Neimark-Hopf, che compare solo quando $C < -1$, con instabilità per $\alpha < \frac{1}{C} + \gamma$;*

c) *Per $C > 1$, l'equilibrio E^* può perdere stabilità attraverso una biforcazione Flip e diventa instabile se $\alpha < \frac{2\gamma C - 2}{2C - 1}$, oppure attraverso una biforcazione di Neimark-Hopf con instabilità per $\alpha > \frac{1}{C} + \gamma$.*

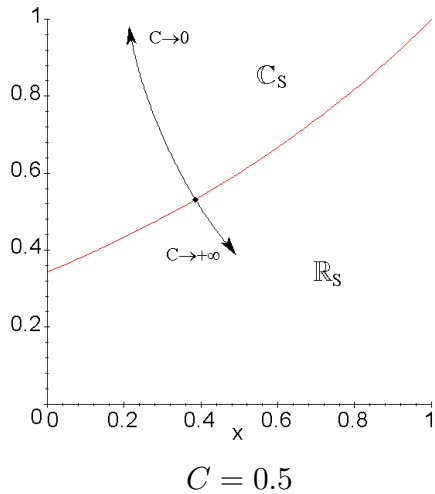
Graficamente, i risultati contenuti nella Proposizione 3.3 sono rappresentati nelle quattro figure seguenti. In esse sono illustrati i diagrammi di biforcazione relativi a valori del parametro C rappresentativi dei tre casi. Nel caso $C > 1$, la retta $\alpha = \frac{2\gamma C - 2}{2C - 1}$, relativa alla biforcazione Flip, si sposta verso destra quando $C \rightarrow 1$ ed esce successivamente dalla regione interessante del piano, $I = \{(0, 1) \times (0, 1)\}$, dopo essere passata per il punto $(1, 0)$ quando $C = 1$; viceversa per $C \rightarrow +\infty$ la curva si approssima alla retta $\alpha = \gamma$, cosicché al limite, l'equilibrio di perfetta previsione risulta instabile per ogni $\alpha < \gamma$.



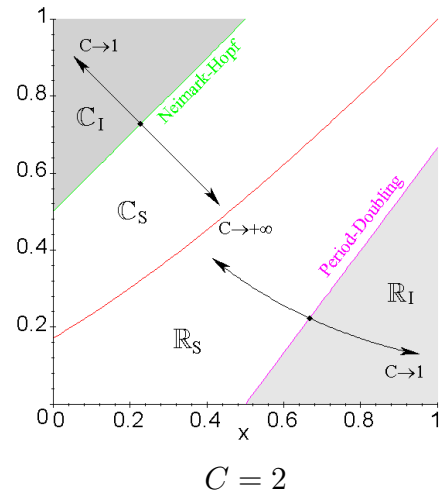
$C = -2$



$C = -0.5$



$C = 0.5$



$C = 2$

Contemporaneamente, la retta $\alpha = \frac{1}{C} + \gamma$, lungo la quale si verifica la biforcazione Neimark-Hopf, si sposta verso l'alto quando $C \rightarrow 1$ ed esce successivamente dalla regione interessante del piano dopo essere passata per $(0, 1)$ quando $C = 1$; viceversa per $C \rightarrow +\infty$ la curva si approssima alla retta $\alpha = \gamma$ e quindi al limite, l'equilibrio di perfetta previsione risulta instabile per ogni $\alpha > \gamma$. Il caso $C < -\frac{1}{2}$ è quasi simmetrico al precedente, se si esclude il fatto che la biforcazione Flip si presenta prima della Neimark (per $C = -\frac{1}{2}$ invece che per $C = -1$). In particolare, la retta $\alpha = \frac{2\gamma C - 2}{2C - 1}$, relativa alla biforcazione Flip, si sposta verso l'alto quando $C \rightarrow -\frac{1}{2}$ ed esce successivamente dalla regione interessante del piano dopo essere passata per

il punto $(0, 1)$ quando $C = -\frac{1}{2}$; viceversa per $C \rightarrow -\infty$ la curva si approssima alla retta $\alpha = \gamma$, cosicché al limite, l'equilibrio di perfetta previsione risulta instabile per ogni $\alpha > \gamma$. Contemporaneamente, la retta $\alpha = \frac{1}{C} + \gamma$, lungo la quale si verifica la biforcazione Neimark-Hopf, si sposta verso il basso quando $C \rightarrow -1$ ed esce successivamente dalla regione interessante del piano dopo essere passata per $(1, 0)$ quando $C = -1$; viceversa per $C \rightarrow -\infty$ la curva si approssima alla retta $\alpha = \gamma$ e quindi al limite, l'equilibrio di perfetta previsione risulta instabile per ogni $\alpha < \gamma$. Osserviamo che quando $C \rightarrow \pm\infty$ anche la parabola $\alpha = \frac{(1+C-\gamma C+\gamma C^2)\pm 2\sqrt{C(1-\gamma+\gamma C)}}{(1-C)^2}$ tende alla $\alpha = \gamma$, facendo così diminuire (e al limite scomparire) la regione in cui si hanno anche autovalori complessi. Il caso $-1 < C < 1$ non presenta biforcazioni; si hanno però autovalori complessi in una regione delimitata da una parabola che tende a scomparire quando $C \rightarrow 0$ mentre si trova nella regione $\alpha < \gamma$ quando C è negativo e viceversa nella regione $\alpha > \gamma$ quando C è positivo.

Queste tre regioni per C possono essere interpretate rispetto ai parametri b e π^* rendendo esplicita la relazione fra la stabilità dell'equilibrio e l'obiettivo di politica monetaria al variare del coefficiente b . Restrignendo l'attenzione al quadrante positivo $b, \pi^* > 0$, abbiamo:

- I. $C < -1$ significa $b < \pi^*$ e $b > \pi^*(1 - \pi^*)$,
- II. $-1 < C < -\frac{1}{2}$ significa $b < \pi^*(1 - \pi^*)$ e $b > \pi^*(1 - 2\pi^*)$,
- III. $-\frac{1}{2} < C < 0$ significa $b < \pi^*(1 - 2\pi^*)$,
- IV. $0 < C < 1$ significa $b > \pi^*(1 + \pi^*)$,
- V. $C > 1$ significa $b > \pi^*$ e $b < \pi^*(1 + \pi^*)$.

Le ragioni sono rappresentate nella figura 3.3.

Restrignendo l'analisi a $b > \pi^*$ abbiamo i seguenti risultati:

- per b elevato e π^* piccolo ($b > \pi^*(1 + \pi^*)$), l'equilibrio risulta essere stabile per ogni coefficiente di apprendimento-memoria degli agenti e della Banca Centrale;
- nel caso di cui sopra abbiamo una dinamica non oscillatoria per $\alpha < \gamma$ ed un andamento oscillatorio per $\alpha > \gamma$, al crescere di b o al diminuire di π^* abbiamo che la regione dalla dinamica oscillatoria diminuisce e al limite tende a scomparire;

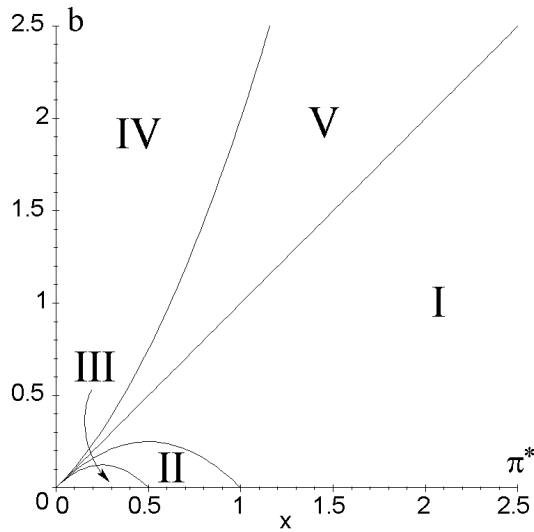


Figura 3.3:

- se $\pi < b < \pi^*(1 + \pi^*)$, allora l'equilibrio sarà stabile se i fattori che descrivono la memoria dei due processi di apprendimento sono simili, altrimenti l'equilibrio sarà instabile;
- la situazione è analoga a quella del primo modello; una maggiore componente di memoria non comporta una maggiore stabilità dell'equilibrio, quello che risulta essere rilevante è che il settore privato e la Banca Centrale abbiano memoria simile.

Conclusioni al Capitolo 3

L'analisi che abbiamo proposto permette di valutare sotto quali ipotesi una politica monetaria di inflation targeting fondata sulla aspettativa di inflazione del settore privato come obiettivo intermedio risulta essere efficace. In [66, 13], è stata messa in evidenza l'instabilità che una politica monetaria di questo tipo può portare. In questo lavoro abbiamo mostrato che sotto l'ipotesi di razionalità limitata una politica di inflation targeting risulta essere effi-

cace se l'obiettivo di inflazione è basso o, altrimenti, se la Banca Centrale e gli agenti hanno passi di apprendimento simili.

Le tre regole di apprendimento studiate non sono ordinabili in termini di ampiezza della regione di stabilità. Ad un insieme di informazioni più ampio non corrisponde una più ampia regione di stabilità dell'equilibrio.