

## Capitolo 2

# Stabilità degli equilibri e persistenza del caos nel Modello Cobweb con apprendimento

### Introduzione al Capitolo 2

Il modello cobweb fu sviluppato negli anni '30 (per un inquadramento storico vedi [29]) nel tentativo di fornire una spiegazione della persistente fluttuazione dei prezzi in determinati mercati di prodotti agricoli. In particolare la teoria può essere applicata allo studio di quei mercati in cui fra le decisioni di produzione e l'ottenimento dell'output intercorrono significativi periodi di tempo ed in cui si può quindi ipotizzare che la quantità prodotta dipenda dalle aspettative sui prezzi che si verificheranno al momento della vendita, prezzi che saranno determinati dalla quantità offerta a tale istante. Il classico modello cobweb (il termine fu coniato da Kaldor in [44]) fu analizzato nell'ipotesi di aspettative statiche (in cui  $x_{t+1}^e = x_t$ ) e domanda ed offerta lineari, conducendo al ben noto risultato che il prezzo di mercato converge nel lungo periodo al prezzo di equilibrio se il valore assoluto dell'elasticità della domanda è maggiore dell'elasticità dell'offerta. La letteratura è vasta ma vale la pena di citare il lavoro di Ezekiel in cui si stabiliscono le condizioni sotto le quali si verifica convergenza ad uno stato stazionario, divergenza o cicli considerando cicli produttivi di diversa lunghezza, sempre nell'ipotesi di

aspettative statiche.

Il modello Cobweb può ben rappresentare mercati di beni che soddisfano tre condizioni:

1. la produzione è completamente determinata dalla reazione dei produttori al prezzo osservato, nell'ipotesi di concorrenza perfetta (i produttori pianificano la produzione futura assumendo che i prezzi attuali persistano e che le loro decisioni non influenzino il mercato);
2. il processo produttivo richiede almeno un periodo pieno e una volta prese le decisioni di produzione queste non possono essere più modificate fino al periodo successivo
3. il prezzo è fissato dalla domanda, data l'offerta disponibile.

È evidente che tali condizioni non sono facili a verificarsi; nondimeno il modello Cobweb si è affermato nel tempo come un punto di riferimento della Teoria Economica.

Più interessante, dal nostro punto di vista, è quella parte della letteratura che si concentra su come si formano le aspettative e sull'effetto che tali meccanismi di formulazione delle previsioni hanno sulla stabilità dell'equilibrio. Nel 1958, Nerlove [55] propose l'uso dell'ipotesi di aspettative adattive nel modello cobweb. Tale proposta era motivata dal fatto che in alcuni articoli di taglio econometrico era stato mostrato che l'elasticità della domanda rispetto al prezzo risultava, in molti mercati di beni agricoli, inferiore all'elasticità dell'offerta. Sotto tali condizioni la versione del modello con aspettative statiche prevedeva cicli di prezzi di ampiezza crescente in contrasto con quanto evidenziato dai mercati oggetto di studio, i quali non mostravano alcun segno di comportamento esplosivo.

Nerlove cercò di riconciliare la teoria con l'evidenza e mostrò che la convergenza è possibile sotto condizioni più deboli qualora le aspettative venissero formate con un meccanismo di tipo adattivo. Quello di Nerlove non fu l'unico tentativo di spiegare quanto risultava dall'evidenza empirica; Waugh [65] (in questo stesso articolo fornisce un'ottima review della letteratura precedente) fa risalire il fenomeno alla variazione relativa dell'elasticità di offerta e domanda ai diversi livelli di prezzo.

Molte sono state anche le critiche a questo modello. Ci limitiamo a ricordare quelle riguardanti la razionalità dell'utilizzo di meccanismi di formulazione delle aspettative arbitrari da parte di agenti che sarebbero altrimenti

massimizzatori del profitto. Lo stesso Nerlove non affrontò il problema. Successivamente la mancata capacità di fornire una risposta valida a questa critica, contemporaneamente all'affermarsi dell'ipotesi di aspettative razionali (le cui implicazioni nel modello cobweb furono analizzate da Muth nel famoso articolo del 1961 [54]), ha contribuito a far diminuire sempre più l'interesse nei confronti di questo modello almeno fino alla metà degli anni '80 quando in molti articoli è stato nuovamente studiato soprattutto in relazione alla sua capacità di manifestare dinamiche caotiche. In [4, 23, 42, 46] si è mostrato che possono verificarsi fluttuazioni caotiche dei prezzi qualora almeno una fra le curve di domanda e offerta sia non monotona. Successivamente Hommes in [38, 39, 40] ha dimostrato che, sotto aspettative adattive, si può avere una dinamica caotica dei prezzi anche se le curve di domanda ed offerta sono entrambe monotone. In questo capitolo introdurremo un nuovo meccanismo di apprendimento che può essere considerato come una generalizzazione dell'apprendimento adattivo. Vedremo come con tale meccanismo, e sotto condizioni ragionevoli, il sistema risulterà più stabile e al tempo stesso ammetterà la coesistenza di equilibri.

## 2.1 Il modello di riferimento

Introduciamo adesso il modello cobweb con offerta nonlineare studiato da Hommes in [38, 39].

Consideriamo quindi un singolo mercato di un bene deperibile che richiede una unità di tempo per essere prodotto. La domanda  $q_t^d$  per il bene prodotto dipende dal suo prezzo  $p_t$ . Poiché è necessario un periodo per produrre il bene, le decisioni di produzione dipendono dal prezzo che i produttori riterranno prevalente al momento della vendita. Infine il prezzo sarà determinato dalla condizione di equilibrio del mercato.

Il modello può quindi essere rappresentato dalle seguenti tre equazioni:

$$\begin{aligned}
 q_t^d &= D(p_t) && \text{Domanda} \\
 q_t^s &= S(p_t^e) && \text{Offerta} \\
 q_t^d &= q_t^s && \text{Equilibrio temporaneo}
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Assumiamo che la domanda sia linearmente decrescente

$$D(p_t) = a - bp_t \quad b > 0
 \tag{2.2}$$

mentre per quanto riguarda l'offerta ipotizziamo che rispetti due considerazioni economiche:

- Quando il livello dei prezzi è basso l'offerta cresce lentamente a causa dei costi d'impianto e dei costi fissi.
- Quando il livello dei prezzi è alto l'offerta cresce lentamente a causa dei vincoli dati dalla capacità produttiva.

La più semplice delle curve che soddisfi le due condizioni date, assume una forma ad S con un unico punto di flesso  $\bar{p}$  tale che:

- i.  $S'$  è crescente per  $p < \bar{p}$ ;
- ii.  $S'$  è decrescente per  $p > \bar{p}$ ;
- iii. è zero il limite per  $p \rightarrow \infty$  di  $S'$ .

Hommes studia il modello dato nell'ipotesi di aspettative adattive

$$p_{t+1}^e = p_t^e + w(p_t - p_t^e) \quad (2.3)$$

considerando variazioni nel livello della domanda (i.e. al variare del coefficiente  $a$ ) e variazioni nel coefficiente di memoria  $w$ . Per semplicità attraverso un cambio di coordinate si porta il punto di flesso  $\bar{p}$  nell'origine. Inoltre si considerano funzioni di offerta che dipendono da un coefficiente  $\lambda$  ( $S_\lambda(p_t^e)$ ) che ne determina la pendenza massima.

Sostituendo, le equazioni (2.1 - 2.3) descrivono la dinamica delle aspettative attraverso la

$$p_{t+1}^e = f_{a,b,w,\lambda}(p_t^e) = p_t^e + w(D^{-1}S(p_t^e) - p_t^e) \quad (2.4)$$

Ovviamente la dinamica dei prezzi attesi definisce univocamente anche quelle dei prezzi e delle quantità.

Valgono le seguenti proposizioni.

**Proposizione 2.1 (Hommes 94)** *Sia data la mappa (2.4) con  $b > 0$  e  $0 < w < 1$ . Esiste  $\bar{\lambda}$  tale che per ogni  $\lambda > \bar{\lambda}$  esistono  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$  tali che:*

1.  $f$  ha un punto fisso globalmente stabile se  $a \leq a_1$  e se  $a \geq a_5$ ;
2. la mappa  $f$  è caotica per un intervallo di valori di  $a$  che contiene  $a_2$  e per un intervallo di valori di  $a$  che contiene  $a_4$ ;
3.  $f$  ha un punto fisso instabile, un'orbita periodica stabile di periodo due e nessun altro punto periodico per  $a = a_3$ .

Al variare di  $a$  quindi la dinamica passa dalla convergenza verso un punto fisso stabile ad una dinamica topologicamente caotica (alla Li & Yorke [47]) attraverso una cascata di biforcazioni period-doubling e successivamente ritorna ad una dinamica asintoticamente stabile ad un ciclo-2 passando attraverso una cascata di biforcazioni period-halving. Infine tutta la sequenza si ripete in senso inverso fino a ritornare allo stato stazionario stabile.

Per quanto riguarda la dinamica al variare di  $w$  si ha

**Proposizione 2.2 (Hommes 94)** *Sia data la mappa  $f$  (2.4) con  $b > 0$ . Esiste  $\bar{\lambda}$  tale che per ogni  $\lambda > \bar{\lambda}$  esistono  $a$  e  $w_1 < w_2 < w_3$  tali che:*

1.  $f$  ha un punto fisso globalmente stabile per valori di  $0 < w < w_1$ ;
2. la mappa  $f$  è caotica per un intervallo di valori di  $w$  che contiene  $w_2$ ;
3.  $f$  ha un ciclo stabile di periodo due e nessun altro punto periodico con periodo diverso da 1 e 2 per  $w_3 < w \leq 1$ .

Anche in questo caso la transizione fra i tre stati è dovuta a cascate di biforcazioni period-doubling e period-halving.

Per sviluppare alcune simulazioni utili a comprendere meglio quanto stabilito nelle precedenti proposizioni e nei successivi teoremi, utilizzeremo come particolare specificazione della funzione di offerta, quella utilizzata da Hommes in [38, 39]. Sia quindi,

$$S_\lambda(p_t^e) = \arctan(\lambda p_t^e) \quad \lambda > 0 \quad (2.5)$$

La mappa diventa

$$p_{t+1}^e = p_t^e + w \left( \frac{a - \arctan(\lambda p_t^e)}{b} - p_t^e \right) \quad (2.6)$$

In figura 2.1 è illustrato il risultato dato nella Proposizione 2.1. Si tratta di un diagramma di biforcazione di  $f$  rispetto al coefficiente  $a$ . Gli altri parametri sono fissati a  $b = 0.25$ ,  $w = 0.3$  e  $\lambda = 4.8$ . Il coefficiente  $a$  è stato incrementato con passo pari a 0.002; per ogni valore di  $a$ , dopo un transitorio di 500 periodi, sono stati tracciati 500 valori del prezzo atteso ottenuti con successive iterazioni. La situazione descritta nella Proposizione è completamente verificata. Inizialmente si ha un punto fisso stabile (l'equilibrio di perfetta previsione) e successivamente, attraverso una successione di infinite biforcazioni Period-doubling si passa a dinamiche caotiche per poi, attraverso un'altra successione di infinite biforcazioni, questa volta Period-halving,

si passa a dinamiche che convergono ad un ciclo di periodo due. Successivamente con una sequenza inversa si ritorna ad una situazione di convergenza verso l'equilibrio di perfetta previsione. Osserviamo che il diagramma di biforcazione è simmetrico rispetto all'origine; questo è dovuto alla simmetria della funzione di offerta scelta per le simulazioni.

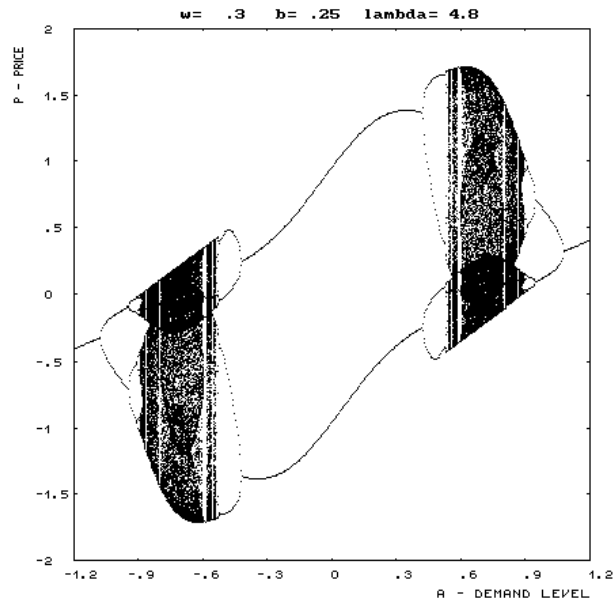


Figura 2.1: Diagramma di biforcazione, al variare del parametro  $a$ , del modello cobweb con domanda nonlineare per  $w = 0.3, b = 0.25, \lambda = 4.8$

In figura 2.2 è illustrato il risultato dato nella Proposizione 2.2. In questo caso il diagramma di biforcazione di  $f$  è tracciato rispetto al coefficiente  $w$ . Gli altri parametri sono fissati a  $a = 0.8, b = 0.25$  e  $\lambda = 4$ . Il coefficiente  $w$  è stato incrementato con passo pari a 0.002; per ogni valore di  $w$ , dopo un transitorio di 500 periodi, sono stati tracciati 500 valori del prezzo atteso ottenuti con successive iterazioni. La simulazione evidenzia che inizialmente si ha un punto fisso stabile (l'equilibrio di perfetta previsione). Successivamente, attraverso una successione di infinite biforcazioni Period-doubling si passa a dinamiche caotiche per poi, attraverso un'altra successione di infinite biforcazioni, questa volta Period-halving, si passa a dinamiche che convergono ad un ciclo di periodo due. Per valori di  $w$  vicini 0 oppure vicini a 1

l'evoluzione dei prezzi è regolare al contrario di ciò che avviene per valori intermedi. Se i produttori attribuiscono elevata significatività all'ultimo prezzo che hanno visto verificarsi, tenderanno a commettere degli errori di previsione sistematici e il sistema convergerà ad un ciclo-2 di elevata ampiezza. Viceversa se i produttori considerano significative le loro ultime previsioni (indipendentemente dall'errore commesso), il sistema convergerà all'equilibrio stazionario di perfetta previsione (con una sorta di *self-fulfilling prophecies*). Comunque per un maggiore approfondimento della dinamica della mappa in questa situazione vale la pena vedere [39].

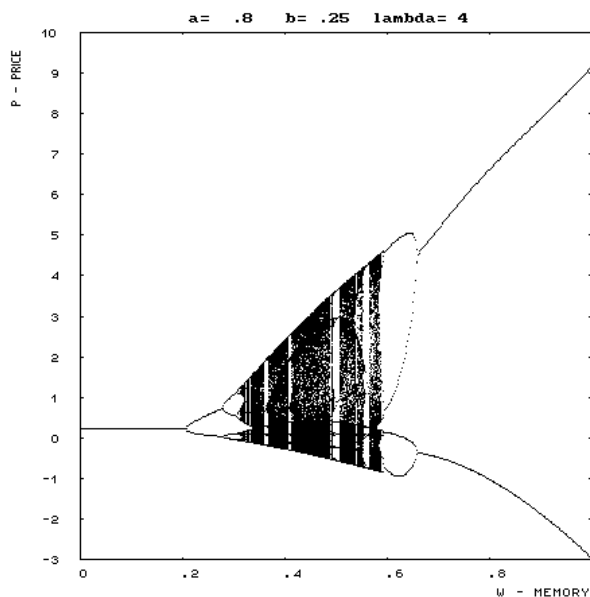


Figura 2.2: Diagramma di biforcazione, al variare del parametro  $w$ , del modello cobweb con domanda nonlineare per  $a = 0.8, b = 0.25, \lambda = 4$

In definitiva mentre in Nerlove [55] l'introduzione dell'ipotesi di aspettative adattive nel modello cobweb con domanda ed offerta lineari aveva un effetto stabilizzante sulla dinamica dei prezzi, nel caso nonlineare studiato da Hommes il risultato è duplice. Da un punto di vista quantitativo, passando dal modello tradizionale al caso con aspettative adattive, le oscillazioni diminuiscono di ampiezza e quindi risulta un effetto stabilizzante sulla dinamica dei prezzi. Al contrario l'analisi qualitativa suggerisce che l'effetto

possa essere destabilizzante, potendo evidenziare dinamiche convergenti a cicli di periodo qualunque o anche comportamento caotico.

In quanto segue introdurremo un nuovo meccanismo di apprendimento che può essere considerato come una sorta di estensione di quello adattivo e vedremo in che modo i risultati illustrati possono risultarne modificati.

## 2.2 Apprendimento

### 2.2.1 Iterazioni di Mann

Una *Iterazione di Mann* è una successione generata, a partire da una data condizione iniziale, da una regola ricorsiva del tipo

$$\begin{cases} x_n = F(y_n) \\ y_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_{nk} x_k \\ \sum_{k=0}^n a_{nk} = 1, \quad a_{nk} \geq 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

dove  $F$  è una funzione continua. In tal modo  $x_n$  è funzione di una media pesata dei valori che ha assunto in precedenza. Quindi una iterazione di questo genere può essere utilizzata in un sistema dinamico discreto,  $x_{n+1} = F(x_n)$ , per modellare un fenomeno in cui si ha memoria degli stati passati. Infatti per il calcolo del nuovo stato  $x_{n+1}$  attraverso la funzione  $F(\cdot)$  si utilizza una media dei vecchi dati anziché la sola ultima osservazione. Questo schema ricorsivo è stato studiato per la prima volta da Mann in [50] e successivamente nella letteratura matematica in [1, 14, 15, 18, 45, 56]. In generale si considera la media pesata

$$a_{nk} = \frac{\sigma_k^{(n)}}{S_n}, \quad \sigma_k \geq 0 \quad (2.8)$$

dove ad ogni data  $n \geq 0$ , il vettore di pesi

$$\sigma^{(n)} = \left\{ \sigma_0^{(n)}, \sigma_1^{(n)}, \dots, \sigma_n^{(n)} \right\} \quad (2.9)$$

definisce l'influenza relativa di ogni stato  $x_k$  nel calcolo della media  $y_n$  e

$$S_n = \sum_{k=0}^n \sigma_k^{(n)} \quad (2.10)$$

assicura la condizione di normalizzazione. Ad ogni data  $n$  il vettore dei pesi relativi può essere ottenuto aggiungendo l'ultima componente senza modificare le precedenti. Sotto quest'ultima condizione la mappa può essere riscritta come

$$y_{n+1} = (1 - \varsigma_n) y_n + \varsigma_n x_n = (1 - \varsigma_n) y_n + \varsigma_n F(y_n) \quad (2.11)$$

dove

$$\varsigma_n = \frac{\sigma_n}{S_n} \quad (2.12)$$

che prende il nome di *iterazione di Mann segmentata*.

Il particolare interesse che in ambito economico desta la possibilità di studiare sistemi dinamici che dipendano dagli stati passati ha favorito l'utilizzo di questi schemi ricorsivi. Inoltre, quando la media pesata delle passate osservazioni è considerata come meccanismo di formazione delle aspettative da parte degli agenti, questo tipo di iterazioni, scritte nella forma segmentata, ricordano le aspettative adattive, con l'unica differenza che il passo di apprendimento non è costante ma dipende dal tempo. Per alcuni esempi di applicazioni in campo economico vedi [7, 12, 17].

La mappa definita da (2.11) è non autonoma, del tipo

$$y_{n+1} = f(n, y_n) \quad (2.13)$$

Lo studio degli attrattori e dei loro domini di stabilità è in generale un problema di complessa soluzione in quanto i suoi insiemi limite non sono, in generale, insiemi invarianti. Ciò è dovuto al fatto che l'operatore  $f(n, y_n)$  cambia al crescere di  $n$ . Diamo la seguente definizione.

**Definizione 2.3** *Dato un operatore non autonomo  $f(n, y_n)$ , la sua forma limite è definita da*

$$g(n, y_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(n+k, y_n)$$

dove  $f(n+k, y_n)$  è il traslato dell'operatore  $f(n, y_n)$ . Se la forma limite non dipende esplicitamente da  $n$  si dice che è autonoma.

Nel caso particolare della (2.11), se  $\varsigma_n \rightarrow \varsigma < \infty$  la mappa limite è autonoma e assume la forma

$$y_{n+1} = g(y_n) = (1 - \varsigma) y_n + \varsigma F(y_n)$$

Nel paragrafo successivo vedremo un caso in cui questo avviene, quando i pesi sono decrescenti geometricamente. Nel caso in cui la mappa abbia una forma limite autonoma risulta naturale pensare di poter studiare gli attrattori, con le relative proprietà di stabilità e bacini di attrazione, attraverso di essa. Purtroppo ciò non è in generale corretto in quanto la corrispondenza fra gli attrattori (e relative proprietà) della mappa limite con quelli dell'iterazione di Mann originale è data solo in alcuni casi particolari. Per una trattazione esaustiva dell'argomento, che va al di là del nostro interesse attuale, è possibile vedere [15]. Vale la pena soffermarsi sulla proposizione seguente

**Proposizione 2.4 (Bischi, Gardini 95)** *Sia  $F$  continua e sia  $\Omega$  l'insieme limite di una soluzione  $y_n$  della mappa*

$$y_{n+1} = f(n, y_n) = (1 - \varsigma_n) y_n + \varsigma_n F(y_n)$$

dove  $\varsigma_n$  è definito come in (2.12).

Allora, se  $f$  ammette una forma limite autonoma,  $\Omega$  è un insieme invariante per la mappa limite

$$y_{n+1} = g(y_n) = (1 - \varsigma) y_n + \varsigma F(y_n)$$

L'implicazione è valida solamente in un verso, cosicché l'esistenza, per esempio, di un  $k$ -ciclo per la mappa  $g$  non fornisce in generale alcuna informazione riguardo all'esistenza di un tale  $k$ -ciclo per l'iterazione di Mann  $f$ . Inoltre la Proposizione non consente di fare alcuna affermazione riguardo alle proprietà di stabilità di tale insieme invariante. In effetti è possibile che esista un ciclo attrattivo per la mappa limite  $g$  e che questo non sia l'insieme limite di alcuna traiettoria del processo non autonomo. In realtà questa situazione di totale incertezza, come vedremo nel prossimo paragrafo, può essere parzialmente superata in alcuni casi.

### 2.2.2 Modelli con apprendimento di tipo “fading memory”

Consideriamo adesso il meccanismo di formazione delle aspettative nel caso di modelli con agenti “fading memory”. In questa classe di modelli, la variabile di stato (per esempio i prezzi in un modello Cobweb) si suppone essere determinata attraverso una funzione delle aspettative, ad essa riferite,

prevalenti ad un dato istante; tali aspettative sono determinate attraverso una media pesata delle passate osservazioni, che sono disponibili in numero finito (ad esempio, a partire da una certa data). Questo schema può essere inserito nella più generale descrizione formale delle *Iterazioni di Mann*. Come abbiamo visto nel paragrafo precedente, in tale caso si ha:

$$\begin{cases} x_n = F(x_t^e) \\ x_{t+1}^e = \sum_{k=0}^n a_{nk} x_k \\ \sum_{k=0}^n a_{nk} = 1, \quad a_{nk} \geq 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Tipicamente, nella letteratura economica (vedi Barucci [7], Barucci-Bischi [12] e Bischi-Naimzada [17]) i pesi sono ottenuti attraverso una progressione geometrica normalizzata:

$$\begin{cases} x_n = F(x_t^e) \\ x_{t+1}^e = \sum_{k=0}^n a_{nk} x_k = \sum_{k=0}^n \frac{\rho^{n-k}}{W_n} x_k \\ W_n = \sum_{i=0}^n \rho^i \end{cases} \quad \rho \in (0, 1) \quad (2.15)$$

Osserviamo che è possibile scrivere

$$\begin{aligned} x_{t+1}^e &= \sum_{k=0}^n \frac{\rho^{n-k}}{1 + \rho W_{n-1}} x_k \\ &= \frac{1}{1 + \rho W_{n-1}} x_n + \frac{\rho W_{n-1}}{1 + \rho W_{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^{n-k-1}}{W_{n-1}} x_k \\ &= \frac{1}{1 + \rho W_{n-1}} x_n + \frac{\rho W_{n-1}}{1 + \rho W_{n-1}} x_t^e = \frac{1}{W_n} x_n + \frac{\rho W_{n-1}}{W_n} x_t^e \end{aligned}$$

Perciò (2.15) si trasforma nella:

$$\begin{cases} x_{t+1}^e = \frac{1}{W_n} F(x_t^e) + \frac{W_{n-1}}{W_n} x_t^e \\ W_{n+1} = 1 + \rho W_n \end{cases} \quad \rho \in (0, 1) \quad (2.16)$$

dove si pone come condizione iniziale  $W_0 = 1$ . Questo tipo di struttura è passibile di diverse specificazioni a seconda della dipendenza della variabile di stato dal valore delle aspettative passate, presenti o future. Così possiamo comunemente aspettarci

$$n = t + h \quad h \in \mathbb{Z}$$

e in esempi economicamente significativi  $h \in \{-1, 0, 1\}$ . Facendo tendere  $t$  all'infinito si ottiene

$$W_n = \sum_{i=0}^n \rho^i = \sum_{i=0}^{t+h} \rho^i \rightarrow \frac{1}{1-\rho}$$

e dunque (2.16) si approssima alla

$$x_{t+1}^e = (1-\rho)F(x_t^e) + \rho x_t^e$$

cosicché ponendo  $\alpha = 1 - \rho$  la *mappa limite* sarà

$$x_{t+1}^e = x_t^e + \alpha(F(x_t^e) - x_t^e) \quad (2.17)$$

ovvero un classico modello di aspettative adattive

Si hanno due casi limite: quando  $\rho = 1$  a tutte le osservazioni passate viene attribuito lo stesso peso, si ottiene perciò (posto  $h = -1$  e  $y = x^e$ )

$$x_t^e = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} x_k$$

che coincide con la legge considerata da Bray in [20]; quando  $\rho = 0$ , invece, restiamo con aspettative miopi (statiche)

$$x_t^e = x_{t-1}$$

La letteratura esistente ha investigato le proprietà dinamiche di (2.16) principalmente attraverso lo studio della sua mappa limite (2.17): vedi per esempio [7]. A differenza di quanto abbiamo visto per una generica iterazione di Mann, nel caso specifico questo approccio è parzialmente giustificato dalle tre seguenti Proposizioni.

**Proposizione 2.5 (Bischi, Gardini 95)** *Ogni insieme invariante della mappa limite (2.17) è l'insieme limite di qualche orbita della mappa (2.16).*

**Proposizione 2.6 (Bischi, Gardini 95)** *Se  $x^*$  è un punto fisso attrattivo della mappa limite (2.17) allora  $x^*$  è un punto fisso attrattivo anche per la mappa (2.16).*

**Proposizione 2.7 (Bischi, Gardini 95)** *Sia  $A$  un  $k$ -ciclo per la mappa limite (2.17). Allora:*

1. *se  $A$  è attrattivo (almeno da un lato), allora  $\mathcal{A} = A \times \{W^*\}$  è un ciclo attrattivo per la (2.16); il bacino di attrazione di  $A$  per la mappa (2.16) è dato dall'intersezione del bacino bidimensionale di  $\mathcal{A}$  con la retta delle condizioni iniziali  $W_0 = 1$ ;*

2. *se  $A$  è repulsivo, allora  $\mathcal{A} = A \times \{W^*\}$  è un ciclo repulsivo per la (2.16).*

Quindi lo studio della mappa limite consente di estendere i risultati al modello originale solo per quanto riguarda l'analisi locale degli equilibri<sup>1</sup>, mentre niente può inferirsi a proposito del comportamento dinamico globale e, in particolare, a proposito della forma del bacino di attrazione che deve essere studiato direttamente attraverso l'iterazione di Mann. In quanto segue, affronterò questo problema, riscrivendo (2.16) in una forma che consenta di applicare immediatamente i risultati della sezione 1.3. In questo modo ci garantiremo almeno una parziale comprensione del comportamento dinamico globale della stessa (2.16), senza ricorrere in alcun modo alla mappa limite.

Osserviamo che, grazie alla sostituzione  $\alpha_t = \frac{1}{W_n}$  e posto  $y = x^e$ , (2.16) è un caso particolare del seguente sistema<sup>2</sup>:

$$\begin{cases} x_{t+1}^e = x_t^e + \alpha_t(F(x_t^e) - x_t^e) \\ \alpha_{t+1} = \frac{\alpha_t}{\rho + \alpha_t} \quad 0 < \alpha_0 < 1 \end{cases} \quad (2.18)$$

Proviamo adesso che (2.18) soddisfa le tre ipotesi elencate nella sezione 1.3.

**Teorema 2.8** *Il sistema (2.18) soddisfa le ipotesi [A1],[A2] e [A3] se  $\rho \in \mathcal{E}(x^*)$ .*

**Dimostrazione.**

La coppia  $(x^*, \alpha^*)$  con  $x^* = F(x^*)$  e  $\alpha^* = 1 - \rho$  è un punto fisso per (2.18) e la matrice Jacobiana valutata in tale punto restituisce

$$J(x^*, \alpha^*) = \begin{bmatrix} 1 + \alpha^*[F'(x^*) - 1] & 0 \\ 0 & 1 - \alpha^* \end{bmatrix}$$

---

<sup>1</sup>Questo è dovuto al fatto che la dinamica di breve periodo di (2.16), data la condizione iniziale  $W_0 = 1$ , può essere radicalmente diversa da quella implicata da (2.17), che è imperniata su  $W = \frac{1}{1-\rho}$ .

<sup>2</sup>Basta infatti porre  $\alpha_0 = 1$  nella (2.18).

cosicché otteniamo le consuete condizioni di stabilità

$$1 - \frac{2}{\alpha^*} < F'(x^*) < 1 \quad (2.19)$$

già incontrate nel paragrafo 1.2 (vedi (1.11)), dove il secondo autovalore,  $1 - \alpha^* = \rho$ , si trova nel cerchio unitario, mentre la disuguaglianza (2.19) è verificata per ipotesi. Quindi la [A1] è verificata; in particolare, poiché tutta l'analisi è significativa per  $F'(\cdot) < 1$  la condizione (2.19) è verificata se  $\rho > \frac{F'(\cdot)+1}{F'(\cdot)-1}$ . [A2] è banalmente verificata. Passando ad [A3], per ogni  $\alpha_t \neq \alpha^*$  si avrà:

$$\begin{aligned} \left| \alpha^* - \frac{\alpha_t}{1 - \alpha^* + \alpha_t} \right| &= \left| \frac{(\alpha^* - \alpha_t) + \alpha^* \alpha_t - \alpha^{*2}}{1 - \alpha^* + \alpha_t} \right| \\ &= |\alpha^* - \alpha_t| \left| \frac{1 - \alpha^*}{1 - \alpha^* + \alpha_t} \right| < \gamma |\alpha^* - \alpha_t| \end{aligned}$$

per qualunque  $\left| \frac{1 - \alpha^*}{1 - \alpha^* + \min\{\alpha_0, \alpha^*\}} \right| < \gamma < 1$ , poiché la successione  $\{\alpha_t\}$  è strettamente crescente se  $\alpha_0 \in (0, \alpha^*)$  e viceversa se  $\alpha_0 > \alpha^*$ . Questo conclude la dimostrazione. ■

Osserviamo che, rispetto a quanto già stabilito in [14] con la Proposizione 2.7, con la quale si stabiliva una relazione fra i bacini dell'iterazione e della sua mappa limite, con il Teorema precedente e attraverso il Teorema 1.3 siamo in grado di dire qualcosa su come tali bacini sono effettivamente fatti

Ovviamente l'apprendimento con “fading memory” è estremamente semplificato e benché soddisfi le proprietà descritte nel primo capitolo difficilmente può essere interpretato secondo le linee tracciate nella sezione 1.1. In effetti la seconda equazione del sistema (2.18), non dipende in alcun modo dalla variabile osservata e quindi non può essere pensato come un meccanismo utilizzato dagli agenti per aggiornare la propria funzione aspettativa sulla base dell'esperienza. Nel prossimo paragrafo, partendo da questo schema costruiremo un meccanismo di apprendimento che potrà essere ricondotto nello schema interpretativo indicato.

### 2.2.3 Modelli a “memoria endogena”

Nei paragrafi precedenti abbiamo mostrato come alcuni meccanismi di apprendimento già studiati in letteratura (fading memory comprensivo del caso

limite “Bray”) soddisfino le ipotesi richieste nel Teorema 1.3 e quindi forniscano, almeno implicitamente, una interpretazione del coefficiente  $\alpha$  come “memoria” degli agenti o in alternativa come “importanza” che essi attribuiscono alla massa dei dati. Il modo in cui abbiamo rappresentato la struttura “fading memory” in (2.18) ha il vantaggio di rendere evidente che, in questo modello, la regola attraverso la quale vengono aggiornati i pesi è eccessivamente semplificata. Se ipotizziamo che gli agenti modifichino tali coefficienti con l’obiettivo di migliorare le proprie previsioni, è poco plausibile assumere che essi ignorino gli errori commessi in passato nel momento in cui stabiliscono la significatività dei dati osservati. In effetti, questa caratteristica consegue necessariamente dal fatto che il parametro di memoria è fissato una volta per sempre. Per fare un passo verso una descrizione più convincente del processo di apprendimento, consideriamo il caso di agenti che rivedono i pesi attribuiti alle osservazioni passate attraverso una legge che utilizza l’ultimo errore previsionale come punto di riferimento per valutare la consistenza delle vecchie osservazioni; questo in conseguenza del fatto che tale errore è stato generato da una previsione basata sul contributo informativo dei vecchi dati della serie temporale.

Il meccanismo che assumiamo venga utilizzato dagli agenti al fine di formulare le proprie aspettative sul futuro valore della variabile economica in osservazione, è descritto in quanto segue. Per semplicità e chiarezza, farò riferimento al sistema (1.8a) specificato nel caso di un modello di tipo Cobweb, in cui quindi si pone  $s = t$ .

Al tempo  $t = 0$  supponiamo che la condizione iniziale  $x_0^e$  sia data. Non ci soffermiamo qui sul modo in cui gli agenti formulano le prime aspettative.

Il sistema, definito in (1.8a) genera il primo valore,  $x_0 = F(x_0^e)$ , della variabile in oggetto. A questo punto,  $t = 1$ , gli agenti sono in grado di esprimere le aspettative relative al periodo successivo attraverso una media pesata delle osservazioni passate che, a questo punto, coincide con l’unico valore osservato  $x_1^e = x_0$ . Al generico tempo  $t$  gli agenti possono confrontare l’ultimo dato osservato con le aspettative da loro formulate al riguardo. Sulla base di tale errore,  $(x_t - x_t^e)$ , saranno in grado di valutare l’aderenza dei vecchi dati rispetto all’evoluzione più recente della variabile economica e, conseguentemente, di decidere il loro peso,  $\rho_t = H(x_t, x_t^e)$ , nella formulazione delle nuove aspettative.

Un possibile modo di fare ciò è esemplificato in quanto segue.

Dato

$$x_t^e = \frac{\sum_{i=0}^{t-1} a_i x_{t-1-i}}{\sum_{i=0}^{t-1} a_i}$$

dove la somma al denominatore rappresenta un fattore di normalizzazione e dato  $\rho_t$  che rappresenta un indice della significatività dei dati pregressi, si aggiornano le aspettative nel modo seguente

$$x_{t+1}^e = \frac{x_t + \rho_t x_t^e}{1 + \rho_t \sum_{i=0}^{t-1} a_i}$$

facendo quindi ancora una media pesata dove i vecchi dati mantengono i vecchi pesi, più o meno “svalutati” attraverso l’indice di significatività che assumiamo appartenere a  $(0, 1)$ . Quindi sviluppando, date le due successioni,  $\{\rho_i\}$  e  $\{x_j\}$ ,  $i = 1, \dots, t$ ,  $j = 0, \dots, t$ , si ottiene

$$x_{t+1}^e = \frac{x_t + \rho_t x_{t-1} + \rho_t \rho_{t-1} x_{t-2} + \dots + \rho_t \rho_{t-1} \dots \rho_1 x_0}{1 + \rho_t + \rho_t \rho_{t-2} + \dots + \rho_t \rho_{t-1} \dots \rho_1} \quad (2.20)$$

o, in una forma più compatta

$$x_{t+1}^e = \frac{x_t + \sum_{j=0}^{t-1} \prod_{i=0}^j \rho_{t-i} x_{t-1-j}}{1 + \sum_{j=0}^{t-1} \prod_{i=0}^j \rho_{t-i}} \quad (2.21a)$$

$$x_{t+1} = F(x_{t+1}^e) \quad (2.21b)$$

$$\rho_{t+1} = H(x_{t+1}, x_{t+1}^e) \quad (2.21c)$$

dove la somma al denominatore della (2.21a) rappresenta un fattore di normalizzazione.

Il meccanismo, nonostante la sua complessa apparenza, si fonda su di una banale osservazione. Poiché le aspettative vengono formate facendo una media (sia pur pesata) dei vecchi dati, il verificarsi di un errore consistente può essere interpretato come indice del fatto che il sistema sta attraversando (o ha attraversato) un periodo di rapida trasformazione e che di conseguenza la variabile in oggetto si va assestando su valori diversi da quelli passati.

L'unica conseguenza ragionevole di tale argomentazione non può che essere l'attribuzione di un basso peso (ovvero una scarsa rilevanza, significatività) alla massa dei dati della serie storica a vantaggio dell'ultima osservazione disponibile. Questa caratteristica è incorporata nella funzione  $H(\cdot)$ , rispetto alla quale possiamo assumere che faccia corrispondere all'ultimo valore osservato un indice di significatività dei vecchi dati che sarà tanto più piccolo quanto più grande è l'errore.

**Osservazione 2.9** *Si osservino due aspetti del meccanismo di apprendimento (2.20) che possono a prima vista sembrare strani e in conflitto con la comune intuizione, ovvero:*

1) *che il coefficiente di memoria (o di significatività se si preferisce)  $\rho_t$  incide non su  $x_t$  ma su tutte le osservazioni precedenti;*

2) *che l'effetto del coefficiente  $\rho_t$  non si esaurisce al tempo  $t$  ma si ripercuote anche su tutte le previsioni che verranno effettuate alle date successive.*

*Entrambi questi aspetti non sono casuali ma traducono due delle caratteristiche essenziali del modello. Per quanto riguarda la (1) ricordiamo che  $\rho_t$  lo si ottiene dopo aver constatato l'errore commesso al tempo  $t$  (ovvero  $x_t - x_t^e$ ); tale errore può servire come base per valutare l'affidabilità dei dati utilizzati per formulare le aspettative  $x_t$ , ovvero la serie storica fino al tempo  $t - 1$ . È quindi corretto che  $\rho_t$  incida su tali dati. Per quanto riguarda la (2) dobbiamo considerare quale potrebbe essere un meccanismo alternativo cui potremmo riferirci. Una possibile estensione del fading memory (forse quella che appare come la più naturale) che non possieda tale caratteristica è la seguente:*

$$\begin{cases} x_t = F(x_t^e) \\ x_{t+1}^e = \sum_{k=0}^t \frac{\rho_t^{t-k}}{\sum_{k=0}^t \rho_t^k} x_k = \frac{x_t + \rho_t x_{t-1} + \rho_t^2 x_{t-2} + \dots + \rho_t^t x_0}{1 + \rho_t + \rho_t^2 + \dots + \rho_t^t} \\ \rho_{t+1} = H(x_{t+1}, x_{t+1}^e) \end{cases}$$

*Una implicazione negativa di questa legge, che non possiede la proprietà evidenziata in (2), è che i dati passati possono essere fortemente svalutati ad una certa data e completamente rivalutati alla successiva (ad esempio basta pensare al caso in cui  $\rho_k = \rho_{k-1}^M$  con  $M$  molto piccolo). D'altra parte, una volta svalutata la significatività dei dati pregressi sarebbe assai difficile giustificare, da un punto di vista logico, un meccanismo che potrebbe portare a rivalutarli, visto che il minor errore commesso (necessario alla rivalutazione) sarebbe stato ottenuto anche in virtù della bassa considerazione attribuita alle*

*vecchie osservazioni. Se non vogliamo che questo avvenga è necessario che il meccanismo ricordi, ad ogni data  $t$ , anche le valutazioni passate. Da ciò consegue la particolare specificazione.*

Come banale esempio potremmo pensare ad agenti le cui scelte dipendano dalla valutazione dell'inflazione attesa italiana, effettuata a partire dalle informazioni contenute in una serie storica. Successivamente al 1992, quando l'inflazione passò, in breve tempo, da valori a due cifre (anche superiori al 20% all'inizio degli anni '80) a valori inferiori al 7%, la formulazione delle aspettative sulla base di una media dei valori passati avrebbe portato ad errori significativi, se non fosse stata costruita attribuendo pesi molto bassi ai dati più vecchi. In definitiva, avrebbe poco senso, in un periodo a bassa inflazione, fare delle previsioni usando pesantemente i dati relativi all'inflazione galoppante del periodo 1975-1985.

In questo schema interpretativo la variabile  $\rho$  sembra perdere la sua connotazione iniziale di "memoria" degli agenti. In realtà questo non è del tutto vero. Nel meccanismo proposto  $\rho$  assumerebbe valori molto alti qualora la successione dei valori di  $x$  manifestasse bassa variabilità e viceversa tenderebbe a decrescere nel caso di andamento erratico della variabile in osservazione. In questa situazione potremmo pensare che valori che si ripetono simili a se stessi per molto tempo siano più facili da ricordare. Banalmente, è più facile ricordare che l'inflazione è da 50 anni costante e pari al 2%, piuttosto che una successione di 50 valori sempre diversi. Così sarebbe ripristinata una interpretazione di  $\rho$  come capacità degli agenti di memorizzare (e quindi di utilizzare appropriatamente) un insieme di dati.

Alternativamente, e forse in modo più convincente, potremmo pensare a  $\rho$  come misura della memoria, intesa non come "capacità fisica" dei soggetti, ma come "atto volontario" che scaturisce da una valutazione "razionale" della significatività dei dati pregressi. In questo modo  $\rho$  rappresenta l'affidabilità attribuita ai vecchi dati, in quanto indici dell'evoluzione futura della variabile.

Mostriamo adesso come il modello di apprendimento proposto (2.21a) possa essere ridotto ad una forma più congeniale che ci consente di trattarlo

nell'ambito dello schema generale della sezione 1.2. Notiamo che

$$\begin{aligned}
x_{t+1}^e &= \frac{x_t + \rho_t (x_{t-1} + \sum_{j=0}^{t-2} \prod_{i=0}^j \rho_{t-1-i} x_{t-2-j})}{1 + \sum_{j=0}^{t-1} \prod_{i=0}^j \rho_{t-i}} = \\
&= \frac{x_t}{1 + \sum_{j=0}^{t-1} \prod_{i=0}^j \rho_{t-i}} + \frac{\rho_t (x_{t-1} + \sum_{j=0}^{t-2} \prod_{i=0}^j \rho_{t-1-i} x_{t-2-j})}{1 + \sum_{j=0}^{t-1} \prod_{i=0}^j \rho_{t-i}} \frac{1 + \sum_{j=0}^{t-2} \prod_{i=0}^j \rho_{t-1-i}}{1 + \sum_{j=0}^{t-2} \prod_{i=0}^j \rho_{t-1-i}} = \\
&= \frac{1}{1 + \sum_{j=0}^{t-1} \prod_{i=0}^j \rho_{t-i}} x_t + \rho_t \frac{1 + \sum_{j=0}^{t-2} \prod_{i=0}^j \rho_{t-1-i}}{1 + \sum_{j=0}^{t-1} \prod_{i=0}^j \rho_{t-i}} \frac{x_{t-1} + \sum_{j=0}^{t-2} \prod_{i=0}^j \rho_{t-1-i} x_{t-2-j}}{1 + \sum_{j=0}^{t-2} \prod_{i=0}^j \rho_{t-1-i}} = \\
&= \frac{1}{1 + \sum_{j=0}^{t-1} \prod_{i=0}^j \rho_{t-i}} x_t + \frac{\sum_{j=0}^{t-1} \prod_{i=0}^j \rho_{t-i}}{1 + \sum_{j=0}^{t-1} \prod_{i=0}^j \rho_{t-i}} x_t^e \equiv \alpha_t x_{t-1} + (1 - \alpha_t) x_t^e
\end{aligned}$$

ed osservando che

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_t}{\alpha_t + \rho_t} &= \frac{\frac{1}{1 + \sum_{j=0}^{t-1} \prod_{i=0}^j \rho_{t-i}}}{\frac{1}{1 + \sum_{j=0}^{t-1} \prod_{i=0}^j \rho_{t-i}} + \rho_t} = \\
&= \frac{1}{1 + \left(1 + \sum_{j=0}^{t-1} \prod_{i=0}^j \rho_{t-i}\right) \rho_t} = \frac{1}{1 + \sum_{j=0}^t \prod_{i=0}^j \rho_{t+1-i}} = \\
&= \alpha_{t+1},
\end{aligned}$$

restiamo con

$$\begin{cases} x_{t+1}^e = x_t^e + \alpha_t (F(x_t^e) - x_t^e) \\ \alpha_{t+1} = \frac{\alpha_t}{\alpha_t + \rho_t} \\ \rho_{t+1} = H(x_{t+1}, x_{t+1}^e) \end{cases} \quad (2.22)$$

Se si pensa alle aspettative adattive come modello limite di un meccanismo con *fading memory*, la regola appena introdotta può essere considerata la sua estensione naturale. La prima equazione di (2.22) è una iterazione di Mann segmentata del tipo (2.11). In effetti si tratta di un caso particolare delle iterazioni descritte con le equazioni (2.8-2.12), come ora proveremo.

**Teorema 2.10** *L'iterazione di Mann descritta dalle equazioni (2.21a) rappresenta una generalizzazione delle iterazioni con fading memory definita dalle equazioni (2.15) ed è un caso particolare delle iterazioni definite dalle equazioni (2.8-2.12).*

### Dimostrazione.

Che si tratti di un caso particolare del meccanismo con *fading memory* è banalmente evidente. Per mostrare invece che si tratta di un caso particolare

delle (2.8-2.12) poniamo nella (2.9)  $\sigma_k = \frac{1}{\prod_{i=0}^k \rho_i}$  dove  $\rho_i = H(x_i, x_i^e)$  e posto  $x_n = x_t$  e  $y_n = x_t^e$  sostituiamo nella (2.7). In tal caso si ha per ogni  $t$

$$x_{t+1}^e = \frac{\sum_{k=0}^t \sigma_k x_k}{\sum_{k=0}^t \sigma_k} = \frac{\sum_{k=0}^t \frac{1}{\prod_{i=0}^k \rho_i} x_k}{\sum_{k=0}^t \frac{1}{\prod_{i=0}^k \rho_i}} = \frac{x_t + \sum_{k=0}^{t-1} \prod_{i=0}^k \rho_{t-i} x_{t-k-1}}{1 + \sum_{k=0}^{t-1} \prod_{i=0}^k \rho_{t-i}}$$

dove l'ultimo passaggio lo si ottiene semplificando  $\frac{1}{\prod_{i=0}^k \rho_i}$ . Quest'ultimo è identico alla (2.21a). ■

Verifichiamo adesso che sotto un'appropriata condizione sulla funzione  $H(\cdot)$ , il sistema (2.22) soddisfa le ipotesi del Teorema 1.3.

**Teorema 2.11** *Posto  $\rho^* = H(x^*, x^*)$  e  $\alpha^* = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \rho^{*k}} = 1 - \rho^*$ , il sistema (2.22), con le ipotesi*

- 1)  $H(x, x) \geq H(x_t, x_t^e) \quad \forall x, x_t, x_t^e$
- 2)  $\alpha^* \in \mathcal{E}(x^*)$

soddisfa le ipotesi [A1], [A2] e [A3] del teorema 1.3.

**Dimostrazione.**

Si osservi che  $(x^*, \alpha^*)$  è un punto fisso per (2.22). Per quanto visto nella Sezione (1.2) affinché  $(x^*, \alpha^*)$  risulti asintoticamente stabile è necessario che:

•

$$-1 < 1 - \alpha^* [F'(x^*) - 1] < 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{\alpha^*} < F'(x^*) < 1$$

ciò che è assicurato dall'ipotesi 2);

•

$$\begin{aligned} -1 < \left. \frac{\partial \alpha_{t+1}}{\partial \alpha_t} \right|_{(x^*, \alpha^*)} < 1 &\Leftrightarrow \\ &\alpha^* + \rho^* - \alpha^* \left[ 1 + \frac{\partial H}{\partial x_t}(x^*, x^*) F'(x^*) \overbrace{[F(x^*) - x^*]}^{=0} \right] \\ \Leftrightarrow -1 < \frac{\alpha^* + \rho^* - \alpha^* \left[ 1 + \frac{\partial H}{\partial x_t}(x^*, x^*) F'(x^*) \overbrace{[F(x^*) - x^*]}^{=0} \right]}{(\alpha^* + \rho^*)^2} < 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -1 < \frac{\rho^*}{(\alpha^* + \rho^*)^2} < 1 &\Leftrightarrow -1 < 1 - \alpha^* < 1 \Leftrightarrow 0 < \alpha^* < 2 \end{aligned}$$

che è sempre verificata essendo  $\alpha_t \in (0, 1)$  per ogni  $t$ . Dunque [A1] è soddisfatta.

[A2] è banalmente verificata.

Per quanto concerne [A3]:

$$\begin{aligned}
|\alpha^* - G(x^*, \alpha_t)| &= \left| \alpha^* - \frac{\alpha_t}{\alpha_t + H(x^*, x^*)} \right| = \left| \alpha^* - \frac{\alpha_t}{\alpha_t + \rho^*} \right| = \\
&= \left| \alpha^* - \frac{\alpha_t}{\alpha_t + 1 - \alpha^*} \right| = \left| \frac{\alpha^* \alpha_t + \alpha^* - \alpha^{*2} - \alpha_t}{\alpha_t + 1 - \alpha^*} \right| = \\
&= \left| \frac{\alpha^* (1 - \alpha^*) - \alpha_t (1 - \alpha^*)}{\alpha_t + 1 - \alpha^*} \right| = \left| \frac{(1 - \alpha^*) (\alpha^* - \alpha_t)}{\alpha_t + 1 - \alpha^*} \right| = \\
&= \frac{1 - \alpha^*}{\alpha_t + 1 - \alpha^*} |\alpha^* - \alpha_t|
\end{aligned}$$

Vogliamo mostrare che esiste un  $\gamma$  tale che  $0 < \frac{1 - \alpha^*}{\alpha_t + 1 - \alpha^*} < \gamma < 1$  per ogni  $t$ , ovvero, in modo equivalente, che esiste  $\eta > 0$  tale che  $\alpha_t \geq \eta$  per ogni  $t$ . Osserviamo che dalla seconda equazione della 2.22, sostituendo per ricorrenza, si ottiene

$$\alpha_t = \frac{1}{\frac{\prod_{i=0}^{t-1} \rho_i}{\alpha_0} + 1 + \sum_{j=0}^{t-2} \prod_{i=0}^j \rho_{t-1-i}} \geq \frac{1}{\frac{\rho^{*t}}{\alpha_0} + \sum_{i=0}^{t-1} \rho^{*i}} \geq \frac{1}{\frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{1 - \rho^*}} \stackrel{def}{=} \eta$$

dove la prima disuguaglianza si ottiene grazie all'ipotesi 1). Possiamo dunque scegliere  $\gamma = \frac{1 - \alpha^*}{\eta + 1 - \alpha^*} < 1$  con il quale la [A3] è verificata per ogni  $\alpha_t \neq \alpha^*$ . ■

L'ipotesi fatta sulla funzione  $H(\cdot)$  non è troppo restrittiva, al contrario rispetta completamente l'idea che ci ha condotti nella definizione del meccanismo di apprendimento. Se non si commettono errori la valutazione dei vecchi dati è positiva e il peso attribuitogli elevato.

## 2.3 Apprendimento nel modello Cobweb non-lineare

Applichiamo adesso nel contesto del modello Cobweb illustrato nella sezione 2.1 il meccanismo di apprendimento che abbiamo introdotto nel paragrafo

2.2.3. Il modello diventa

$$(C) = \begin{cases} p_{t+1}^e = f_{a,b,w,\lambda}(p_t^e, w_t) = p_t^e + w_t(p_t - p_t^e) \\ w_{t+1} = g(p_t^e, w_t) = \frac{w_t}{w_t + \rho_t} \end{cases} \quad (2.23)$$

dove

$$p_{t+1} = D^{-1}S(p_{t+1}^e)$$

e

$$\rho_{t+1} = H(p_{t+1}, p_{t+1}^e)$$

e con le ipotesi

- 1)  $(0, 1) \ni \rho^* = H(p, p) \geq H(p_t, p_t^e) \quad \forall p, p_t, p_t^e$
- 2)  $D(\cdot)$  decrescente
- 3)  $S(\cdot)$  crescente

Inoltre indichiamo con  $(p^*, w^*)$  il punto fisso della mappa  $(C)$ , ovvero  $p^*$  tale che  $D(p^*) = S(p^*)$  e  $w^* = 1 - \rho^*$ . Tale punto fisso è unico se la condizione iniziale  $w_0$  è diversa da 0; d'altra parte  $w_0 = 0$  rappresenta un caso degenere e quindi assumeremo  $w_0 \in (0, 1)$ . L'interpretazione del meccanismo di apprendimento è stata già abbondantemente discussa nel paragrafo 2.2.3. In sostanza ipotizziamo che gli agenti attribuiscono maggiore o minore significatività ai dati passati sulla base della bontà delle previsioni effettuate in precedenza.

Possiamo facilmente dimostrare la seguente proposizione:

**Proposizione 2.12** *Il punto fisso  $(p^*, w^*)$  è iperbolico attrattivo (e quindi asintoticamente stabile) se:*

$$1 - \frac{2}{w^*} < \frac{S'(p^*)}{D'(p^*)} < 1$$

e

$$0 < w^* < 2$$

**Dimostrazione.**

È una conseguenza immediata dell'iperbolicità. ■

**Osservazione 2.13** *La prima disequazione è vincolante solo sul lato sinistro in quanto, per le ipotesi fatte sulle funzioni di domanda e di offerta,  $\frac{S'}{D'}$  è una quantità sempre negativa; tale condizione è identica a quella del modello originale (2.4). Utilizzando il simbolismo introdotto nel primo capitolo possiamo dire che questa sarà verificata se  $w^* \in \mathcal{E}(p^*)$ , dove  $\mathcal{E}(p^*)$  è l'insieme dei valori di  $w$  per i quali il punto  $p^*$  è attrattivo per la (2.4). La seconda disequazione, che richiede  $w^* \in (0, 1)$ , come già visto nel Teorema 2.11 è garantita dalle ipotesi su  $H$  e sulla condizione iniziale  $w_0$ .*

### 2.3.1 Alcuni risultati sulla dinamica globale

Abbiamo visto che dal punto di vista locale, l'equilibrio del modello con apprendimento non richiede condizioni più restrittive di quello originale. La particolare legge di apprendimento considerata ci consente però di avere delle informazioni anche per quanto riguarda la dinamica globale. In particolare abbiamo visto (con il Teorema 2.11) che in questa situazione sono verificate le ipotesi del Teorema 1.3. Quindi possiamo affermare che la stabilità, intesa in senso di Fuchs (punti a. e b. e Proposizione 1.1 nella sezione 1.1), del sistema con apprendimento è maggiore rispetto a quello originale. Da un punto di vista geometrico abbiamo che il bacino di attrazione del punto fisso  $(p^*, w^*)$  (nell'ipotesi che sia stabile ovvero che  $w^* \in \mathcal{E}(p^*)$ ) contiene una regione nella quale sono compresi anche punti  $(p, w)$  con  $w \notin \mathcal{E}(p^*)$ . È interessante chiedersi se la regione descritta in tale Teorema è una regione minimale (ovvero il bacino di attrazione contiene molte più cose ed al limite esaurisce tutto lo spazio) oppure se questa descrive abbastanza precisamente il bacino stesso. Possiamo aiutarci con il Teorema seguente

**Teorema 2.14** *Sia dato il sistema*

$$(\Phi) = \begin{cases} x_{t+1} = E(x_t, \alpha_t) = x_t + \alpha_t (F(x_t) - x_t) \\ \alpha_{t+1} = G([x_t - F(x_t)] h, \alpha_t) = G_h(y_t, \alpha_t) \end{cases}$$

*con le ipotesi:*

1.  $F, G \in C^1$ ;
2.  $\alpha \in (0, 1)$ ;
3.  $F$  monotona e limitata ( $-\infty < x_l \leq F(x) \leq x_h < \infty$ );

4.  $x^* = F(x^*)$  e  $F'(x^*) < -1$ ;

5. Per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste un errore  $\hat{y}$  e un  $\hat{\alpha}$  tale che,  $\alpha > \hat{\alpha}$ ,  $|y| > |\hat{y}| \Rightarrow G_h(y, \alpha) > 1 - \varepsilon$ .

Allora esistono  $\bar{x}, \bar{\alpha}, \bar{h}$  tali che per ogni condizione iniziale  $(x_0, \alpha_0)$  che soddisfi:

$$\begin{aligned} |x_0 - x^*| &> |\bar{x} - x^*|, & x_l \leq x_0 \leq x_h \\ \alpha_0 &> \bar{\alpha} \end{aligned}$$

si ha che per ogni  $h > \bar{h}$ ,  $t > 0$

$$|x_t - x^*| > |\bar{x} - x^*| \text{ e } \alpha_t > \bar{\alpha}$$

### Dimostrazione.

Sia  $\hat{y} = [a_0, b_0]$  un intervallo centrato in  $x^*$  in cui  $F'(x) < -1$ . Si ha che  $F(a_0) > b_0$  e  $F(b_0) < a_0$ . Sia allora  $\bar{\alpha} \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}F(b_0) + (1 - \bar{\alpha})x_h &< d \equiv \frac{F(b_0) + a_0}{2} \\ \bar{\alpha}F(a_0) + (1 - \bar{\alpha})x_l &> c \equiv \frac{F(a_0) + b_0}{2} \end{aligned}$$

ovvero

$$1 > \bar{\alpha} > \max \left\{ \frac{d - x_h}{b_1 - x_h}, \frac{c - x_l}{a_1 - x_l} \right\} \quad (2.24)$$

Inoltre, usando la 5., sia  $\bar{h}$  tale che per ogni  $|y| > |\hat{y}|$  e ogni  $\alpha$

$$G_{\bar{h}}(y, \alpha) > \bar{\alpha} \quad (2.25)$$

Da ciò segue che, dette  $a_1$  e  $b_1$  le immagini dei due punti  $a_0$  e  $b_0$  attraverso  $E$ , si ha  $a_1 > b_0$  e  $b_1 < a_0$ . Infatti, usando (2.24)

$$\begin{aligned} a_1 &= \bar{\alpha}F(a_0) + (1 - \bar{\alpha})a_0 > \bar{\alpha}F(a_0) + (1 - \bar{\alpha})x_l > b_0 \\ b_1 &= \bar{\alpha}F(b_0) + (1 - \bar{\alpha})b_0 < \bar{\alpha}F(b_0) + (1 - \bar{\alpha})x_h < a_0 \end{aligned}$$

Inoltre si ha che se  $x_0 < a_0$ , per la monotonia di  $F$ ,  $F(x_0) > F(a_0)$  cosicché

$$x_1 = \bar{\alpha}F(x_0) + (1 - \bar{\alpha})x_0 > \bar{\alpha}F(a_0) + (1 - \bar{\alpha})x_l > b_0$$

Analogamente  $x_0 > b_0 \Rightarrow x_1 < a_0$ . Ricorsivamente, dato che, per (2.25),  $\alpha_t > \bar{\alpha}$  si ottiene

$$\begin{aligned} x_t < a_0 \Rightarrow x_{t+1} &= \alpha_t F(x_t) + (1 - \alpha_t) x_t > \\ &> \alpha_t F(a_0) + (1 - \alpha_t) x_t > \bar{\alpha} F(a_0) + (1 - \bar{\alpha}) x_t > b_0 \end{aligned}$$

e, in modo analogo,  $x_t > b_0 \Rightarrow x_{t+1} < a_0$ . ■

La prima ipotesi è la richiesta standard di regolarità. Le ipotesi 2, 3 e 4 servono ad identificare la particolare classe di funzioni che stiamo analizzando (descritta nella sezione 2.1). La quinta ipotesi traduce l'idea che se si commettono errori sufficientemente grandi, il passo di apprendimento sarà sempre più grande (e quindi la memoria sempre più piccola) di un certo valore dato, in accordo con la nostra interpretazione. Vale la pena dire due parole sul modo in cui è stata specificata la funzione  $G$ . In essa la prima variabile è costituita dall'errore osservato, pesato da un coefficiente  $h$  che determina la varianza della funzione e quindi la reattività agli errori.

**Osservazione 2.15** *Dalla dimostrazione risulta evidente che l'ipotesi 5 può essere considerata eccessivamente stringente. Infatti una volta data la  $F$  è sufficiente che l'ipotesi sia verificata non per ogni  $\varepsilon > 0$ , ma per un particolare valore  $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$  tale che  $\bar{\alpha} = 1 - \bar{\varepsilon}$ .*

Il teorema 2.14 afferma in sostanza che, nelle ipotesi considerate, esistono delle condizioni iniziali la cui immagine attraverso la mappa non converge all'equilibrio di perfetta previsione. Le ipotesi date nel Teorema 2.14 non sono in contrasto con quelle che garantiscono l'applicabilità del Teorema 1.3. Quindi si hanno dei casi di coesistenza di equilibri, come vedremo anche con le simulazioni.

Consideriamo adesso un esempio in cui la specifichiamo la regola di apprendimento  $H$ . Sia

$$H(p_t, p_t^e) = ke^{-[h(p_t - p_t^e)]^2} + d$$

con  $d, k > 0$  e  $k + d < 1$ . Una rappresentazione grafica di tale funzione (in sostanza una Gaussiana) è data in Figura 2.3.

Questa classe contiene funzioni di altezza, incremento e varianza diversa dipendenti dai parametri  $d + k$ ,  $k$  e  $h$  rispettivamente; tutte, dati i vincoli sui parametri, soddisfano le condizioni richieste dalla nostra interpretazione e dal teorema 2.11. Risulta immediato che  $w^* = k + d$ . Inoltre, seguendo

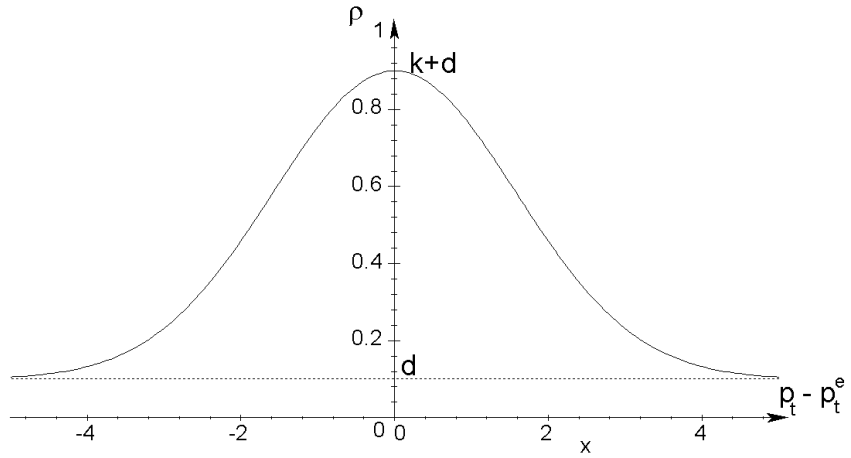


Figura 2.3: La funzione  $H(\cdot)$  per  $d = 0.1$  e  $k = 0.8$

un'interpretazione della regola di apprendimento come una legge con la quale si attribuisce un certo livello di affidabilità ai dati passati sulla base dell'ultimo errore commesso, questa è un chiaro esempio in cui gli agenti decidono di dare importanza alle vecchie osservazioni quando stanno verificando buoni risultati previsionali (e viceversa).

Il modello diventa

$$(C) = \begin{cases} p_{t+1}^e = f_{a,b,w,\lambda}(p_t^e, w_t) = p_t^e + w_t (D^{-1}S(p_t^e) - p_t^e) \\ w_{t+1} = g(p_t^e, w_t) = \frac{w_t}{w_t + ke^{-[h(p_t - p_t^e)]^2} + d} \end{cases} \quad (2.26)$$

dove  $D(\cdot)$  è come in (2.2) e  $S(\cdot)$  verifica le proprietà i, ii, e iii di pagina 46. Vale la

**Proposizione 2.16** *Il sistema (2.26), posto  $d = 0$ , verifica le ipotesi da 1 a 5 del Teorema 2.14.*

**Dimostrazione.**

Le prime quattro discendono immediatamente dalla definizione. Per la quinta basta osservare che per ogni  $w$  esiste un errore sufficientemente grande da rendere  $\frac{w}{w+\rho}$  vicino a uno con errore piccolo a piacere e quindi poiché  $\frac{\partial g}{\partial w} > 0$  si ha il risultato.

■

**Osservazione 2.17** *La condizione  $d = 0$  non è necessaria in generale; per poterla indebolire però è necessario specificare la forma funzionale di  $S(\cdot)$  e  $D(\cdot)$ . In effetti, come verrà anche messo in evidenza dalle simulazioni, nel modello Cobweb nonlineare l'ipotesi 5 è verificata anche per valori di  $d$  piuttosto elevati.*

Specificando anche le funzioni di domanda (come in (2.2)) e offerta (come in (2.5)) si ottiene il sistema

$$(C) = \begin{cases} p_{t+1}^e = f_{a,b,w,\lambda}(p_t^e, w_t) = p_{t+1}^e = p_t^e + w_t \left( \frac{a - \arctan(\lambda p_t^e)}{b} - p_t^e \right) \\ w_{t+1} = g(p_t^e, w_t) = \frac{w_t}{w_t + ke^{-[h(p_t - p_t^e)]^2} + d} \end{cases}$$

Utilizzeremo questa mappa per alcune simulazioni che ci consentano di visualizzare i risultati ottenuti.

Cominciamo con il tracciare i *grafici di iso-periodo* rispetto ai parametri  $k$  e  $d$ . Un punto  $(k, d)$  nello spazio dei parametri si dice *coppia di parametri di periodo  $p$*  se la mappa (C) ha un'orbita stabile di periodo  $p$  per questa coppia. Un *insieme di parametri di iso-periodo  $p$*  consiste di tutte le coppie di parametri di periodo  $p$  appartenenti al dominio considerato. Ovviamente se vi sono periodi attrattivi coesistenti i relativi insiemi di iso-periodo hanno intersezione non vuota. Per tracciare tali grafici ho seguito la procedura seguente. Ho suddiviso i valori da testare in una griglia di  $500^2$  caselle. Data una coppia di parametri  $(k, d)$  appartenente ad ognuna delle caselle (il punto medio) e fissato il valore degli altri, si itera la mappa per una certa condizione iniziale  $(p, w)$ . Dopo 4000 iterazioni si fa il controllo di convergenza (con precisione  $10^{-5}$ ). Se la mappa converge ad un ciclo con periodo compreso fra 1 e 14 si assegna il colore corrispondente (secondo la tabella fornita) al punto relativo alla coppia di parametri; altrimenti si assegna un colore residuo che identifica tutte le coppie di parametri per le quali la mappa converge ad un ciclo di periodo maggiore di 14, ad un'orbita quasi periodica, oppure ad un'orbita caotica (ricordiamo che, essendo la funzione di offerta limitata, la mappa non può divergere). Tutto questo per diverse condizioni iniziali. Il risultato è riassunto nei due grafici distinti (ma molto simili) di Figura 2.4 e 2.5; il valore di  $h$  è fissato arbitrariamente a 0.25, mentre gli altri parametri sono fissati uguali ai valori utilizzati da Hommes nelle simulazioni relative al diagramma di biforcazione di figura 2.2, ovvero:  $a = 0.8$ ,  $b = 0.25$ ,  $\lambda = 4$ . La regione in nero è esclusa dalla simulazione perché fuori dal campo di esistenza

definito dalla condizione  $k + d < 1$ . Nella prima figura è rappresentato il risultato ottenuto con condizioni iniziali molto vicine all'equilibrio di perfetta previsione. Come sappiamo dal teorema 1.3 quando  $d + k > 1 - \bar{w}$  dove con  $\bar{w}$  indico il valore per il quale si verifica la prima biforcazione period doubling nel modello originale (circa  $w = 0.2$  come si vede dalla figura 2.2) il punto  $(p^*, w^*)$  è attrattivo e il suo bacino di attrazione contiene una regione minimale a forma di occhio; questo avviene per coppie dei parametri appartenenti alla regione in bianco. Quando l'equilibrio di perfetta previsione diventa instabile, pur partendo molto vicino da esso, la dinamica converge verso altri attrattori. Per valori appropriati dei parametri tali attrattori possono essere cicli o anche attrattori caotici; non dimentichiamo infatti che per  $k = 0$  la mappa si riduce a quella originale in cui  $w = d$ . Nella seconda figura è rappresentato il risultato ottenuto con condizioni iniziali molto distanti dal punto di perfetta previsione. Dove le due figure coincidono si hanno coppie dei parametri per i quali l'attrattore della mappa è unico (punto fisso, cicli o altro); al contrario dove le due figure sono distinte si ha coesistenza di attrattori. Vale la pena osservare che ciò si verifica certamente dove  $d$  assume valori molto bassi e  $k$  valori molto alti; In tale situazione infatti sia le ipotesi del teorema 1.3 che quelle del teorema 2.14 sono contemporaneamente verificate e quindi si hanno sia punti che convergono al punto di perfetta previsione sia punti che rimangono per sempre lontani da esso. Nelle figure 2.6 e 2.7 sono illustrati gli attrattori con i relativi bacini di attrazione. Come nel caso precedente si è diviso il dominio in una griglia di  $500^2$  caselle. Il punto centrale di ognuna di esse è stato scelto come condizione iniziale per la mappa ( $C$ ). Dopo un transitorio di 1000 iterazioni ho fatto il controllo di convergenza e assegnato un colore corrispondente all'attrattore raggiunto. I due casi si distinguono per diversi valori dei parametri (indicati in alto in ogni figura). Nel primo caso l'attrattore di perfetta previsione coesiste con un ciclo-2, mentre nel secondo coesiste con un ciclo-4; le coordinate degli attrattori sono indicate in alto a destra in ogni figura e sono rappresentati in nero nella figura. In entrambi i casi i parametri si trovano nella regione che verifica le ipotesi del teorema 1.3; possiamo osservare che il bacino di attrazione dell'equilibrio di perfetta previsione assume la forma prevista, pur con dei fenomeni di frattalizzazione dovuti alla noninvertibilità della mappa. In figura 2.8 ho sovrapposto gli attrattori con il relativo bacino ottenuti dalla mappa con apprendimento, al diagramma di biforcazione che si otteneva con il modello originale (con gli stessi valori dei parametri). Risulta evidente come adesso la dinamica sia più stabile da un punto di vista qualitativo, ammettendo soltanto la

convergenza verso l'equilibrio di perfetta previsione o in alternativa verso un ciclo-2; inoltre, come previsto, adesso si può convergere verso il punto fisso anche con valori di  $w$  molto alti scelti come condizione iniziale.

La successiva sequenza di immagini (da 2.9 a 2.14) è analoga ma riferita a diversi valori dei parametri  $a$  e  $b$ . Per quanto riguarda i due grafici di iso-periodo, la situazione è leggermente più complessa. La regione in cui l'equilibrio di perfetta previsione è stabile è più ampia, poiché nel corrispondente modello unidimensionale il valore di biforcazione  $\bar{w}$  è più alto (maggiore di 0.3 come si vede dalla figura 2.11 relativa al diagramma di biforcazione ottenuto con i corrispondenti valori dei parametri). Rispetto alla situazione precedente i due grafici presentano maggiori differenze ed evidenziano molti casi in cui si verifica coesistenza di equilibri. In breve, osserviamo che in questo caso si manifestano anche orbite quasi periodiche, sia con bacini di attrazione molto regolari (figura 2.12) sia con bacini molto frattalizzati (figura 2.13). In ultimo ho messo in evidenza una situazione di coesistenza di due attrattori periodici; un ciclo-3 e un ciclo-4 (figura 2.14). Per tali valori dei parametri l'equilibrio di perfetta previsione è instabile e attraverso due biforcazioni period doubling ha ceduto il posto ad un ciclo-4; contemporaneamente il ciclo-3, che esisteva prima che l'equilibrio biforcasse, continua ad attrarre i punti di vaste regioni del piano.

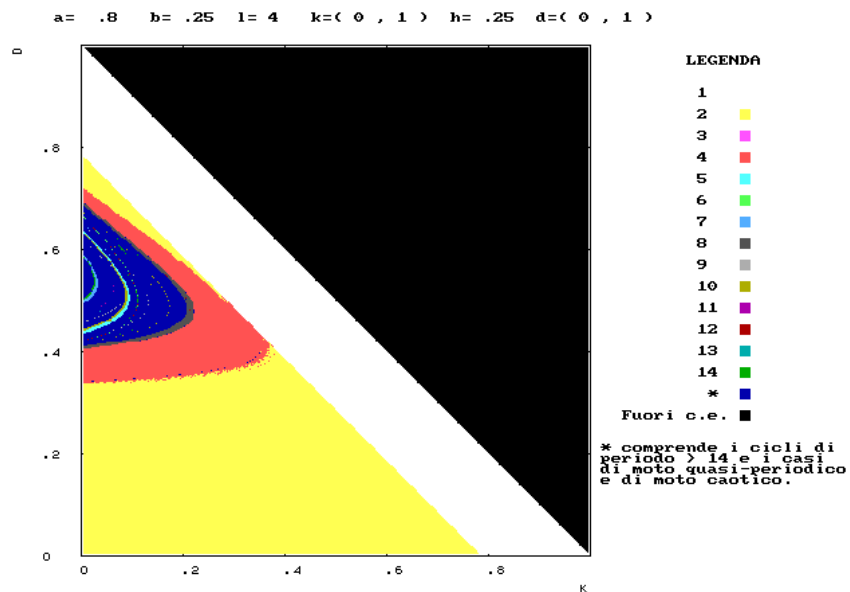


Figura 2.4:

## Conclusioni al Capitolo 2

In questo capitolo ho proposto una possibile estensione del meccanismo di apprendimento adattivo in uno schema *error learning*. L'analisi parte dal presupposto che le aspettative adattive siano il risultato di un meccanismo di apprendimento con *fading memory*, in cui gli agenti formano le previsioni sulla base di una media pesata delle passate osservazioni, con pesi decrescenti geometricamente. Si ipotizza quindi, che tali pesi siano il risultato di una valutazione razionale della significatività dei dati pregressi e che vengano aggiornati dagli agenti una volta che sia noto l'errore commesso. L'impiego di tale regola di apprendimento nel modello Cobweb nonlineare mostra che la stabilità dell'equilibrio di perfetta previsione, in generale, aumenta rispetto al modello originale con aspettative adattive. Inoltre esiste un sottoinsieme di valori dei parametri per i quali il modello evidenzia coesistenza di equilibri. Si tratta di una particolarità associata alla legge di apprendimento utilizzato. In questa situazione, il modello converge all'equilibrio di perfetta previsione se le condizioni iniziali sono sufficientemente vicine ad esso.

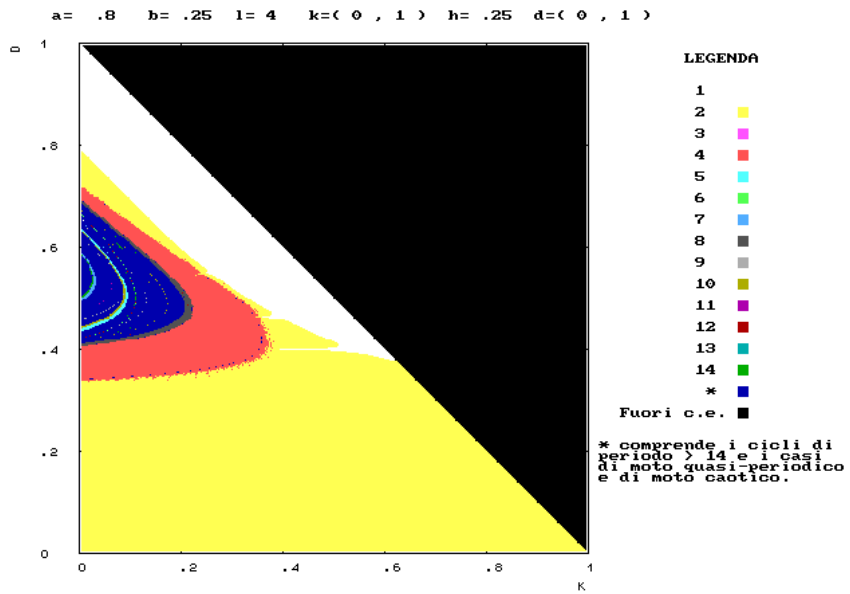


Figura 2.5:

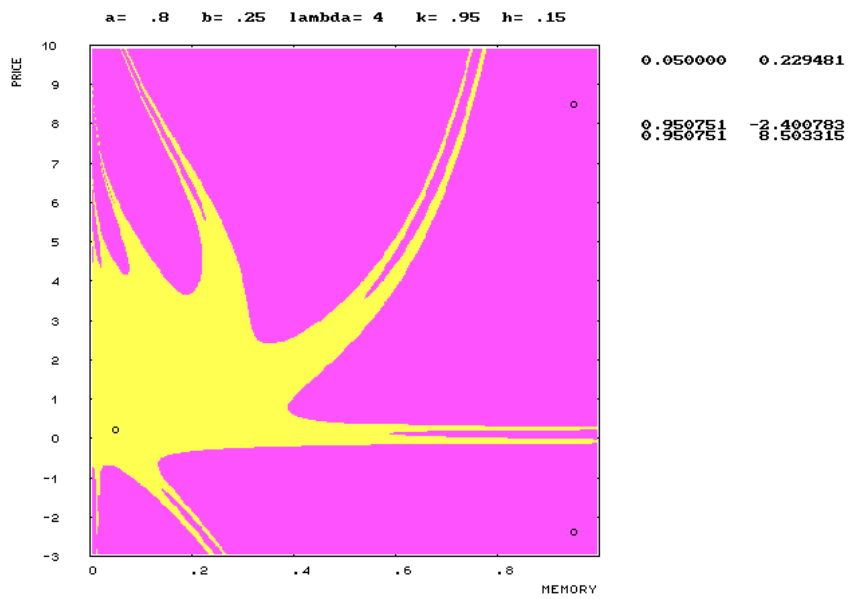


Figura 2.6:

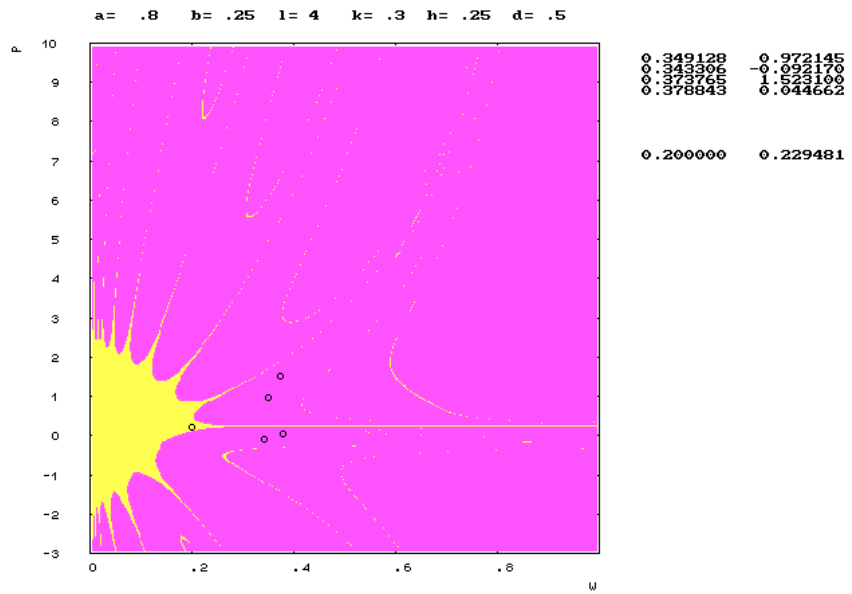


Figura 2.7:

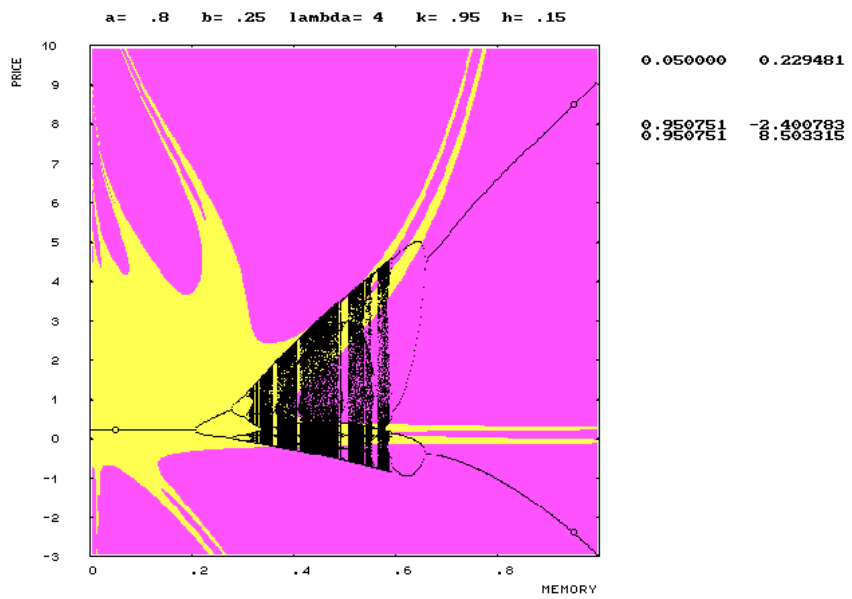


Figura 2.8:

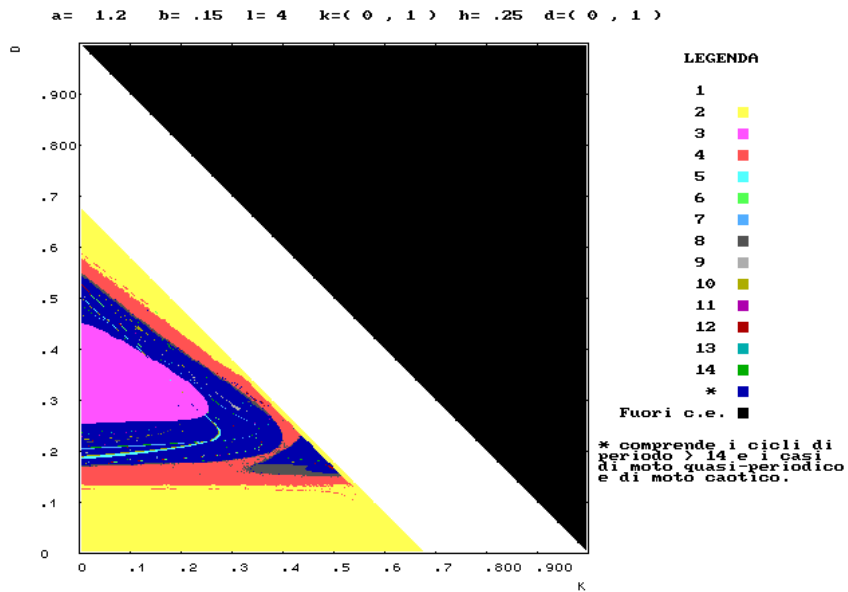


Figura 2.9:

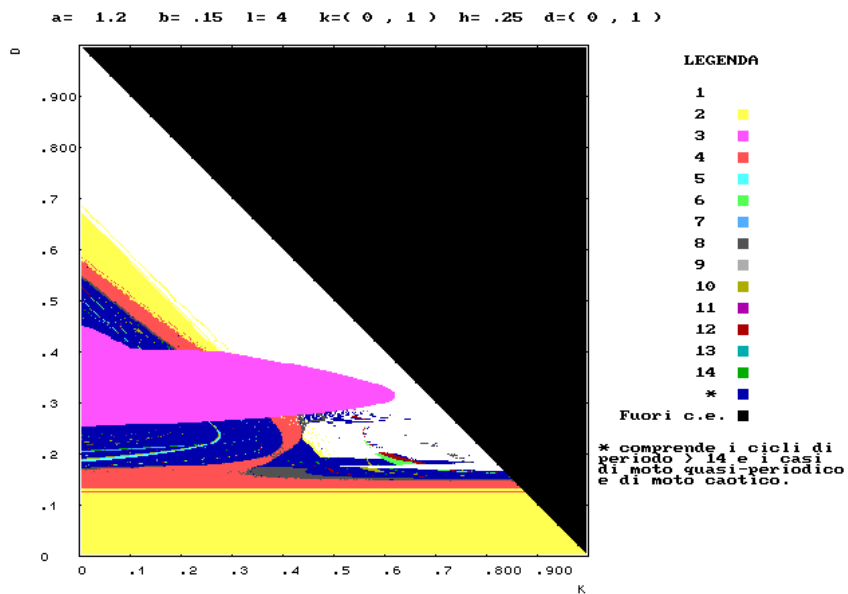


Figura 2.10:

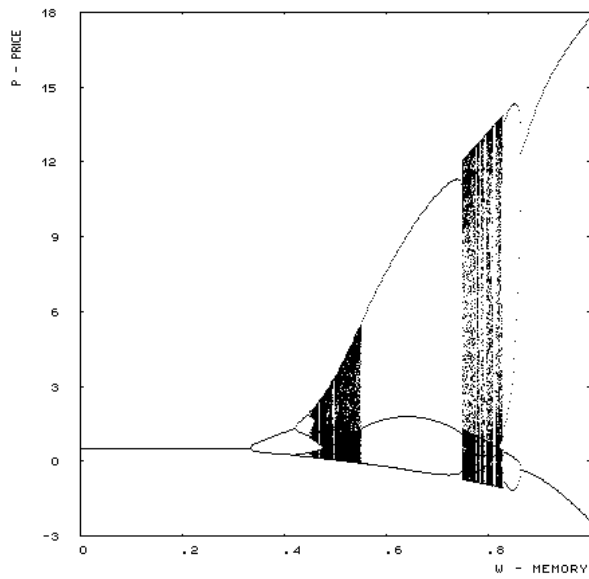


Figura 2.11:

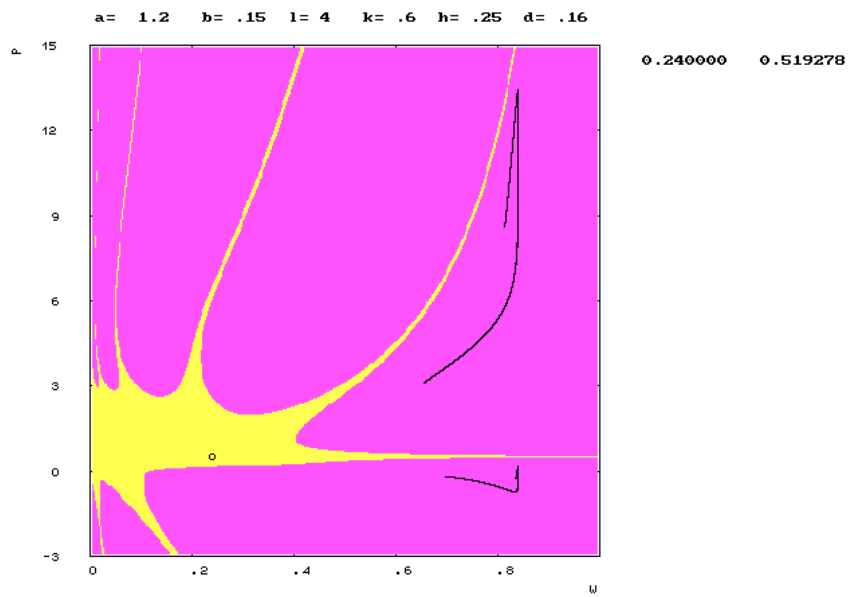


Figura 2.12:

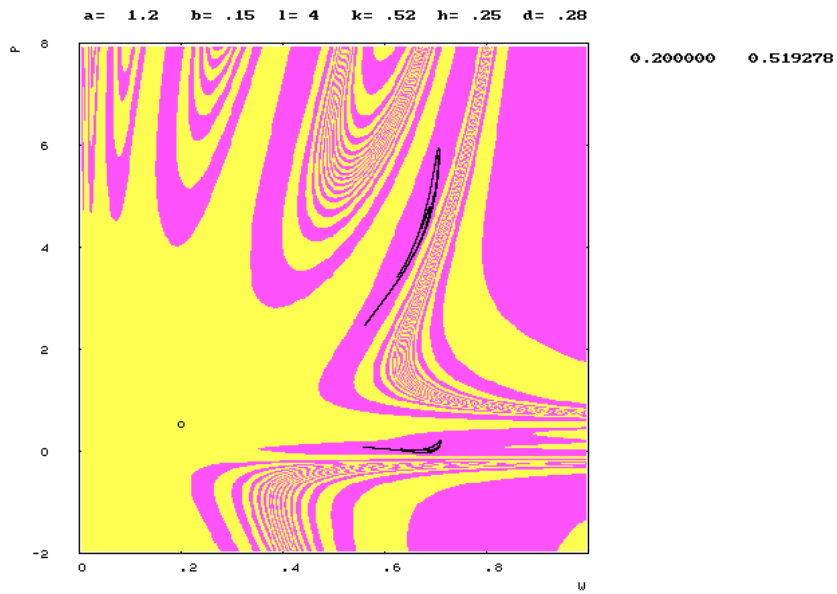


Figura 2.13:

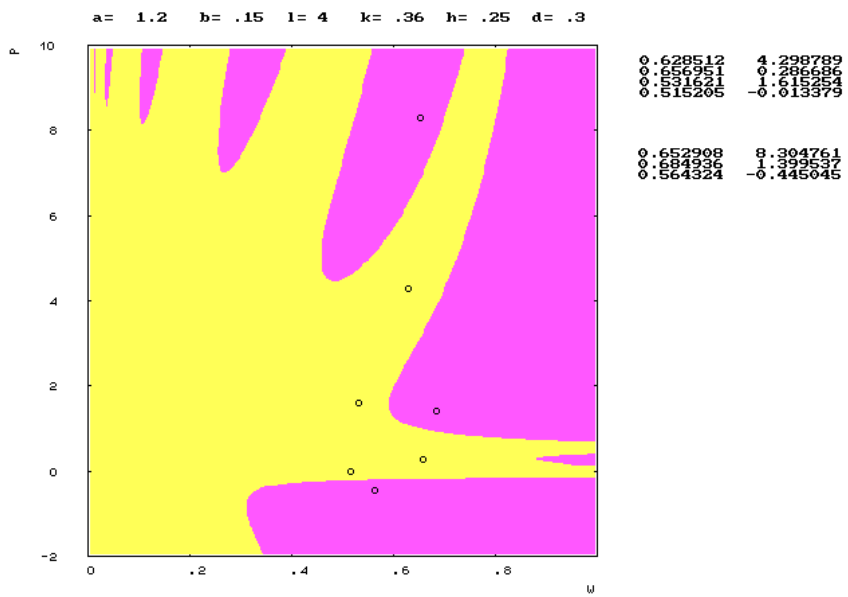


Figura 2.14: