

Capitolo 1

Apprendimento e stabilità degli equilibri di perfetta previsione

Introduzione al Capitolo 1

Il problema dell'apprendimento degli agenti presenti in un'Economia e degli effetti che questo produce sugli aspetti dinamici del sistema è argomento da sempre dibattuto nella Teoria Economica. In molti modelli, l'evoluzione dipende dalle opinioni che gli agenti si formano riguardo ai valori futuri di alcune grandezze economiche ritenute significative. Si tratta di una delle caratteristiche principali dei sistemi sociali, il cui andamento nel tempo, a differenza di quanto avviene nei sistemi meccanici, dipende anche (anzi soprattutto) dalle scelte dei soggetti che ne fanno parte. Tali scelte sono in molti casi fondate sulla percezione che gli agenti hanno del proprio futuro. Diventa importante in questo contesto capire in che modo gli agenti formano le proprie aspettative sulla futura evoluzione del sistema.

Abbiamo già accennato, nell'Introduzione, che l'analisi dei modelli nel caso di *razionalità limitata* consente di superare alcune delle critiche usualmente portate all'ipotesi di *aspettative razionali* (eccessive richieste in termini di razionalità degli agenti) e fornisce uno schema di riferimento all'interno del quale è possibile analizzare alcune interessanti questioni quali la *selezione degli equilibri* e la *convergenza all'equilibrio di perfetta previsione*.

Gli elementi di critica, invece, possono essere sintetizzati in due argomenti principali. In primo luogo, quale che sia l'ipotesi fatta riguardo al meccanismo utilizzato dagli agenti per aggiornare le proprie aspettative (minimi quadrati

ordinari ricorsivi, apprendimento bayesiano, apprendimento tramite reti neurali o algoritmi genetici, apprendimento adattivo autoregressivo, e così via) si tratta comunque di un'ipotesi *ad hoc*. In secondo luogo, emergono spesso risultati logicamente incoerenti quali equilibri ciclici di non perfetta previsione in cui gli agenti commettono errori sistematici, che sono in conflitto con alcune assunzioni minimali sulle capacità logico-deduttive dei soggetti.

Questi due aspetti, apparentemente indipendenti, appaiono invece l'uno come conseguenza dell'altro in una vasta classe di modelli. In effetti vedremo che la convergenza verso cicli di non perfetta previsione può essere generata dal fatto che gli agenti utilizzano un'unica legge, definita una volta per sempre, per aggiornare le proprie aspettative. In questa situazione, mi propongo di mostrare che, utilizzando funzioni aspettativa più complesse in cui la forma funzionale possa cambiare in conseguenza di una valutazione delle performance ottenute, il sistema guadagna una maggiore stabilità. Inoltre, i cicli di non perfetta previsione non saranno più apprendibili (almeno sotto certe condizioni) in favore di una convergenza verso l'equilibrio di aspettative razionali. La maggiore complessità delle funzioni aspettativa utilizzate potrà essere interpretata nel senso di una attribuzione di maggiori capacità agli agenti; in particolare si darebbe loro la possibilità di scegliere fra più alternative il meccanismo attraverso cui formulare delle previsioni.

L'argomento è già stato affrontato in letteratura. In particolare Fuchs in [31] studia il problema dell'apprendimento e dell'aggiornamento della *funzione aspettativa* ipotizzando che questa possa essere scelta, sulla base di un meccanismo di tipo *error learning* (i.e. a partire dalla valutazione dell'ultimo errore commesso), in un insieme ammissibile parametrizzato da uno scalare. In questo schema, e sulla base delle ipotesi fatte si giunge alla conclusione che l'apprendimento non porta, genericamente, ad una maggiore stabilità del sistema. La stessa struttura è stata ripresa successivamente da Grandmont (vedi [35]), portando sostanzialmente a risultati analoghi. Un approccio diverso è stato seguito da Brock e Hommes. In [21] viene definito il concetto di *Adaptively Rational Equilibrium*; si suppone che gli agenti formulino le proprie previsioni attraverso una regola che viene selezionata in un insieme, finito, di *funzioni aspettativa*. Le performance ottenute in passato da ogni funzione aspettativa possono essere valutate e costituiscono l'elemento di riferimento della scelta degli agenti. Si ha quindi una dinamica nell'insieme delle funzioni aspettativa che si mostra essere (sotto certe ipotesi) all'origine delle dinamiche complesse manifestate dalla variabile economica in osservazione. Altri lavori in cui si affrontano i problemi di apprendimento in

un’ottica simile (scelta della funzione aspettativa utilizzata) sono quelli di Arthur [2] e Arthur *et al.* [3] in cui si ipotizza che gli agenti utilizzino un mix di funzioni aspettativa diverse per adattarsi all’ambiente economico.

In questo Capitolo si considera il problema dell’apprendimento nello schema delineato da Fuchs e Grandmont in [31, 35]. Il nostro obiettivo è duplice: da una parte cercheremo di mostrare come, ponendosi in un’ottica parzialmente diversa da quella delineata in tali lavori, la possibilità di scegliere la funzione aspettativa conduce ad una maggiore stabilità del sistema; dall’altra vedremo come tale risultato positivo valga per un insieme di funzioni che presenta una maggiore generalità.

Nella sezione 1.1 illustrerò il quadro di riferimento e alcuni risultati presenti in letteratura, nella sezione 1.2 presenterò il modello che poi verrà studiato in un caso semplificato nella sezione 1.3. Nelle sezioni 1.4, 1.5 e 1.6 vengono successivamente eliminate le ipotesi restrittive e semplificatrici utilizzate in precedenza.

1.1 Il quadro generale

In un articolo del 1979, [31], Fuchs ha affrontato il problema prendendo in considerazione un modello economico dinamico in cui l’evoluzione dipende in maniera cruciale dalle previsioni formate dagli agenti sui valori futuri di alcune grandezze rappresentative dello stato x che descrive il sistema di cui essi sono parte. Le previsioni sono in generale ottenute come valori di una “funzione aspettativa” ($E \in \mathbb{E}$) definita su un certo insieme delle informazioni ottenibili. La funzione aspettativa di un agente riassume la visione, implicita o esplicita, che egli si è formato a proposito del sistema economico. Fuchs considera modelli che ammettono almeno uno stato stazionario x^* e si preoccupa di valutarne la stabilità asintotica; in particolare è interessato all’insieme $\mathcal{E}(x^*) \subset \mathbb{E}$ delle funzioni aspettativa per le quali, mantenendo inalterate le altre proprietà del modello, lo stato stazionario x^* risulta essere un attrattore (almeno locale); chiama gli elementi di $\mathcal{E}(x^*)$, “aspettative stabilizzatrici”. Considera quindi un insieme di modelli più sofisticati in cui è contemplata la possibilità per gli agenti di modificare la propria funzione aspettativa e quindi la propria “visione del mondo”. Tale revisione è usualmente effettuata in seguito all’acquisizione di nuove informazioni e con regole di tipo *error learning* (*ELR*), ovvero avendo come punto di riferimento gli ultimi errori di previsione commessi. Il modello quindi definisce una

dinamica non solo rispetto ad x ma anche rispetto alle regole di apprendimento $E \in \mathbb{E}$ e quindi lo stato del sistema è rappresentato da una coppia $y_t = (x_t, E_t)$. Se l'intuizione classica in base alla quale "a maggiori capacità degli agenti corrisponde una maggiore stabilità dei sistemi economici" fosse vera, sarebbe naturale attendersi che per quest'ultima classe di modelli si verificasse convergenza verso l'equilibrio in un insieme più ampio rispetto ai modelli in cui la regola che presiede all'aggiornamento delle aspettative sia stabilita una volta per sempre. In questa situazione si pone il problema di definire che cosa si intenda con "aumento della stabilità" del sistema. Osserviamo innanzitutto che la trasformazione del modello dal caso con funzione aspettativa data al caso in cui anch'essa viene aggiornata, comporta un aumento della dimensione del problema e quindi il passaggio a qualcosa di "qualitativamente" diverso. Tanto più che quelli che prima erano parametri del problema, rispetto ai quali venivano derivate le condizioni di stabilità, adesso diventano, essi stessi, variabili del sistema, ponendo così un problema di confrontabilità. Per i nostri fini utilizzeremo il concetto di "aumento della stabilità" così come definito da Fuchs in [31]. Usando il suo linguaggio, congetturiamo che, dato $\mathcal{E}(x^*)$, sia possibile trovare un insieme \mathcal{L} di ELR tali da generare una dinamica che:

- a. le traiettorie $\{y_t\}$ che partono da un punto $y_0 = (x_0, E_0)$, dove E_0 appartiene all'insieme $\mathcal{E}(x^*)$ e x_0 si trova in un intorno di x^* , convergono a (x^*, E^*) con $E^* \in \mathcal{E}(x^*)$;
- b. in aggiunta, esistono delle funzioni aspettativa E_0 , con E_0 che non appartiene a $\mathcal{E}(x^*)$, tali che le traiettorie determinate dalla condizione iniziale $y_0 = (x_0, E_0)$, con x_0 appartenente ad un adeguato intorno di x^* , convergono ancora a (x^*, E^*) con $E^* \in \mathcal{E}(x^*)$.

In definitiva in (a) si dice che scegliendo una E_0 qualunque appartenente a $\mathcal{E}(x^*)$, l'equilibrio x^* continua ad essere attrattivo come nel caso in cui la funzione aspettativa E_0 sia data; in (b) si traduce l'intuizione in base alla quale ci si attende che data E_0 esista un modo "intelligente" di apprendere dalla storia passata che migliori in qualche modo la situazione. Le regole di apprendimento \mathcal{L} sono quelle che conducono ad un aumento della stabilità del sistema. Diventa importante stabilire se l'insieme \mathcal{L} abbia una dimensione significativa; Fuchs richiede che, data una topologia "ragionevole" nell'insieme delle ELR questo abbia interno non vuoto.

Più in dettaglio in [31] si considera un modello a generazioni sovrapposte di puro scambio, con popolazione costante ed agenti eterogenei (rispetto alla formulazione delle aspettative). Al tempo t le previsioni sui prezzi che si verificheranno al tempo $t + 1$, x_{t+1}^e , dipendono dal sistema dei prezzi corrente e da una data successione \mathbf{x} (finita) di prezzi osservati in passato. Per semplicità si suppone inoltre che l'insieme delle funzioni aspettativa sia ristretto ad un insieme ammissibile parametrizzato da $\alpha \in \mathbb{R}$. Quindi $E(\cdot) = E(\alpha, \cdot)$. Si richiedono una condizione di razionalità ed una condizione tecnica. La condizione di razionalità impone che se la successione \mathbf{x} è costituita tutta da osservazioni uguali a x^* , (in tal caso scrivo $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$), allora

$$E(\alpha, \mathbf{x}^*) = x^* \quad \text{per ogni } \alpha \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

il che significa, in sostanza, che il meccanismo attraverso cui gli agenti formano le aspettative è in grado di riconoscere almeno i punti stazionari. La condizione tecnica richiede invece che i coefficienti α e le funzioni E siano in corrispondenza biunivoca. Infine si considera l'insieme delle ELR definite su di un compatto e differenziabili con continuità del tipo

$$\alpha_{t+1} = G(\alpha_t, x_t - x_t^e) \quad (1.2)$$

e tali che

$$G(\alpha, 0) = \alpha \quad (1.3)$$

In questa situazione vale la:

Proposizione 1.1 (Fuchs 79) *Sia x^* un equilibrio temporaneo stazionario, $\mathcal{E}(x^*)$ l'insieme delle funzioni aspettativa, parametrizzate da α , per le quali x^* è asintoticamente stabile. Sia data sull'insieme delle ELR , definite su di un compatto e differenziabili con continuità e che verificano le proprietà (1.2) e (1.3), la topologia τ_1 della C^1 -convergenza uniforme. Sia \mathcal{L} il sottoinsieme delle ELR per le quali esiste un intorno U di x^* tale che:*

- a) *le traiettorie $\{y_t\}$ determinate dalla condizione iniziale $y_0 = (x_0, \alpha_0)$ con x_0 in U e α_0 in $\mathcal{E}(x^*)$, convergono a (x^*, α^*) con $\alpha^* \in \mathcal{E}(x^*)$;*
- b) *esistono traiettorie $\{y_t\}$ determinate da condizioni iniziali $y_0 = (x_0, \alpha_0)$ con x_0 in U e α_0 non appartenente a $\mathcal{E}(x^*)$, che comunque convergono a (x^*, α^*) con $\alpha^* \in \mathcal{E}(x^*)$;*

allora \mathcal{L} è un insieme chiuso con interno vuoto per la topologia τ_1 .

Con questa Proposizione Fuchs afferma, in definitiva, che meccanismi di apprendimento come quelli descritti aumentano la stabilità del sistema in un insieme trascurabile di casi. Risultati simili sono presenti in altri lavori. In [35] Grandmont mostra come un meccanismo di *error learning* non modifica i risultati ottenuti in sua assenza. Questa conclusione risulta essere fortemente connessa con l'ipotesi (1.3), la quale appare perfettamente naturale nello schema delineato, dove la legge E rappresenta la “visione del mondo” degli agenti. In questo modo si afferma semplicemente che, se ad un dato istante gli agenti anticipassero perfettamente il livello dei prezzi, da questo dedurrebbero che la loro visione del mondo è corretta e la manterrebbero inalterata per formulare le previsioni per il periodo successivo. D'altra parte, in molti modelli presenti in letteratura, di cui mostrerò in seguito alcuni esempi, questa lettura, e l'ipotesi che ne consegue, non è evidente. Come vedremo in quanto segue sostituendo alla (1.3) una diversa ipotesi, adeguata all'interpretazione dei modelli il risultato verrà completamente ribaltato.

Procederemo per gradi. Pur cercando di mantenere la discussione ad un significativo livello di generalità, in un primo momento affronteremo il problema imponendo delle semplificazioni che garantiscano una immediata comprensibilità dei risultati; in particolare ipotizzeremo che:

- i. gli agenti siano omogenei (ipotesi di *agente rappresentativo*),
- ii. gli agenti utilizzino una *funzione aspettativa* di tipo *adattivo*,
- iii. lo stato del sistema sia, ad ogni data, rappresentato completamente da un'unica grandezza scalare.

Successivamente provvederemo a rimuovere tali restrizioni: la (i) nella sezione 1.5, la (ii) nella sezione 1.6 e la (iii) nella sezione 1.4.

1.2 Il modello

Partiamo da una classe di modelli in cui il valore di un vettore di variabili al tempo s , $\mathbf{x}_s \in X$, è funzione delle aspettative formulate dagli agenti sul valore che tale vettore assumerà ad un tempo t , $\mathbf{x}_t^e \in X$, con $t = s + z$ dove z è un dato numero intero e $X \subseteq \mathbb{R}^m$ è l'insieme dei valori economicamente significativi di \mathbf{x} ;

$$\mathbf{x}_s = F(\mathbf{x}_t^e) \tag{1.4}$$

Al fine di mantenersi nello schema delineato in [31], siamo interessati a modelli economici in cui gli agenti aggiornano le proprie aspettative basandosi sul vettore dei valori assunti in passato dalla variabile interessata. È ben noto che il meccanismo di apprendimento con aspettative adattive autoregressive si ottiene formulando le previsioni attraverso una media pesata, con pesi decrescenti geometricamente, dei vecchi dati osservati. Infatti, avendo a disposizione il vettore delle (infinite) vecchie osservazioni $\mathbf{x} = (x_s, x_{s-1}, \dots)$ e posto $0 < \alpha < 1$, si ottiene

$$x_{t+1}^e = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha (1 - \alpha)^j x_{s-j} = x_t^e + \alpha (x_s - x_t^e)$$

In tale situazione è necessario ipotizzare che l'economia di riferimento non abbia un inizio così da poter disporre di infiniti dati passati. Un modo forse più interessante di ottenere il medesimo modello è quello di considerarlo come mappa limite di un meccanismo di formulazione delle aspettative ottenuto attraverso una iterazione di Mann. In questo caso l'economia ha una data d'inizio e il vettore dei dati disponibili è finito. Questa estensione è particolarmente interessante, soprattutto da un punto di vista interpretativo; vi ritornerò con più precisione nel paragrafo 2.2.1.

Ammettiamo quindi che gli agenti siano caratterizzati da razionalità limitata e che aggiornino le proprie aspettative con una regola di tipo adattivo

$$\mathbf{x}_{t+1}^e = \mathbf{x}_t^e + A(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_t^e) \quad (1.5)$$

dove A è una matrice diagonale con $a_{i,i} = \alpha_i \in \mathcal{A}$ e \mathcal{A} l'insieme dei valori economicamente significativi di α (tipicamente $[0, 1]$), e quindi sostituendo (1.4) in (1.5)

$$\mathbf{x}_{t+1}^e = E(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{x}_t^e + A[F(\mathbf{x}_t^e) - \mathbf{x}_t^e] \quad (1.6)$$

In accordo con quanto discusso in precedenza, siamo interessati ad arricchire questo tipo di modelli ipotizzando che gli agenti, sulla base degli errori commessi in passato, aggiornino i coefficienti α_i che rappresentano il peso dei vecchi dati nel formulare le nuove previsioni. Per semplicità consideriamo temporaneamente modelli con una sola variabile $\mathbf{x}_s = x_s \in \mathbb{R}$, cosicché

$$x_{t+1}^e = x_t^e + \alpha [F(x_t^e) - x_t^e] \quad (1.7)$$

Torneremo in seguito al caso più generale. Vale la pena osservare che questa semplificazione, nulla toglie alla generalità del modello; ponendo $s = t - 1$ si otterrebbe

$$\begin{aligned}x_t &= F(x_{t+1}^e) \\x_{t+1}^e &= x_t^e + \alpha(x_{t-1} - x_t^e)\end{aligned}$$

ovvero un classico modello forward looking del tipo che, ad esempio, si ottiene in un semplice modello a generazioni sovrapposte di puro scambio con un solo bene ed agenti caratterizzati da razionalità limitata. Ponendo invece $s = t$ si otterrebbe

$$\begin{aligned}x_t &= F(x_t^e) \\x_{t+1}^e &= x_t^e + \alpha(x_t - x_t^e)\end{aligned}$$

che potremmo pensare, per esempio, come un modello cobweb con aspettative adattive.

Consideriamo quindi un modello in cui, al tempo t , gli agenti aggiornano le proprie aspettative sulla base di una media pesata dei dati passati e pesi decrescenti geometricamente con ragione α_t che a sua volta viene modificata sulla base di una generale legge g che ne determina la dinamica:

$$x_s = F(x_t^e) \tag{1.8a}$$

$$x_{t+1}^e = x_t^e + \alpha_t(x_s - x_t^e) \tag{1.8b}$$

$$\alpha_{t+1} = g(x_t^e, x_{t+1}^e, x_s, x_{s+1}, \alpha_t) \tag{1.8c}$$

Sia per quanto riguarda la funzione aspettativa che per la legge di apprendimento g sarebbe possibile condurre la discussione ad un più alto livello di generalità, ad esempio considerando una funzione aspettativa generica (sia pur chiedendo che verifichi alcune proprietà) oppure considerando una funzione g che dipenda direttamente dal vettore delle passate osservazioni di x (e non solo in maniera indiretta attraverso x_t^e). Per il momento, per favorire una maggiore chiarezza della discussione manterremo questo schema semplificato. Possiamo comunque notare che, per quanto riguarda la legge di apprendimento g , si tratta di un caso più generale di quello delineato in [31] in quanto le *ELR* rappresentano soltanto un sottoinsieme delle possibili specificazioni della legge g .

In questa sezione analizzo il sistema dinamico ottenuto dalle (1a), (1b) e (1c) sostituendo per x_s e x_{s+1} in (1b) e (1c) e per x_{t+1}^e in (1c):

$$(P) : \begin{cases} x_{t+1}^e = E(x_t^e, \alpha_t) = x_t^e + \alpha_t(F(x_t^e) - x_t^e) \\ \alpha_{t+1} = G(x_t^e, \alpha_t) \end{cases} \quad (1.9)$$

Osserviamo che se la mappa possiede uno stato stazionario con $\alpha^* \neq 0$, allora x^* deve essere un punto fisso della mappa F . La matrice Jacobiana per (1.9) valutata in (x^*, α^*) è:

$$J(x^*, \alpha^*) = \begin{pmatrix} 1 + \alpha^*[F'(x^*) - 1] & 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x_t^e}(x^*, \alpha^*) & \frac{\partial G}{\partial \alpha_t}(x^*, \alpha^*) \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

i cui autovalori sono

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + \alpha^*[F'(x^*) - 1] \\ \lambda_2 &= \frac{\partial G}{\partial \alpha_t}(x^*, \alpha^*) \end{aligned}$$

Dunque, lo stato stazionario è localmente stabile quando $\alpha^* > 0$ se

$$F'(x^*) < 1 \quad \text{e} \quad \alpha^* < \frac{2}{1 - F'(x^*)} \quad (1.11)$$

$$-1 < \frac{\partial G}{\partial \alpha_t}(x^*, \alpha^*) < 1 \quad (1.12)$$

Notiamo che la condizione (1.11) è la stessa che si ottiene nel modello con $\alpha \neq 0$ costante (vedi [7] per un'analisi di questo caso in un modello OLG di puro scambio). Perciò ci possiamo aspettare condizioni di stabilità più stringenti (rappresentate dalla (1.12)) dovute all'introduzione del meccanismo che genera endogenamente α_t .

Può essere interessante esprimere la condizione (1.12) in termini della funzione originale g definita in (1c). Valutando la derivata totale di g rispetto ad α_t otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \alpha_t}(x_t^e, \alpha_t) &= \frac{dg}{d\alpha_t}(x_t^e, x_{t+1}^e, x_s, x_{s+1}, \alpha_t) = \\ &= \frac{dg}{d\alpha_t}(x_t^e, x_{t+1}^e, F(x_t^e), F(x_{t+1}^e), \alpha_t) \equiv \frac{dg}{d\alpha_t}(X) \\ &= \frac{\partial g}{\partial x_{t+1}^e}(X) \frac{\partial x_{t+1}^e}{\partial \alpha_t}(x_t^e, \alpha_t) + \frac{\partial g}{\partial F(x_{t+1}^e)}(X) \frac{\partial F(x_{t+1}^e)}{\partial \alpha_t}(x_t^e, \alpha_t) + \frac{\partial g}{\partial \alpha_t}(X) \\ &= \frac{\partial g}{\partial x_{t+1}^e}(X) [F(x_t^e) - x_t^e] + \frac{\partial g}{\partial F(x_{t+1}^e)}(X) F'(x_{t+1}^e) [F(x_t^e) - x_t^e] + \frac{\partial g}{\partial \alpha_t}(X) \end{aligned}$$

Quindi nello stato stazionario finiamo con:

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha_t}(x^*, \alpha^*) = \frac{\partial g}{\partial \alpha_t}(x^*, x^*, x^*, x^*, \alpha^*) \quad (1.13)$$

Una conseguenza di questo fatto è che, rispetto alle proprietà di stabilità locale del modello, una diversa specificazione della forma funzionale di g restituirà risultati differenti solamente nel caso in cui questa possieda diversa derivata parziale rispetto ad α_t , mentre nessun valore ha la dipendenza indiretta, di g da α_t , attraverso x_s e x_{t+1}^e . Inoltre, se il coefficiente di memoria è reso endogeno attraverso una legge che non dipende autonomamente da α (cioè, se $\frac{\partial g}{\partial \alpha_t} = 0$), la stabilità locale di un dato stato stazionario (x^*, α^*) si verifica nelle medesime circostanze del caso esogeno (α costante, come in [7]).

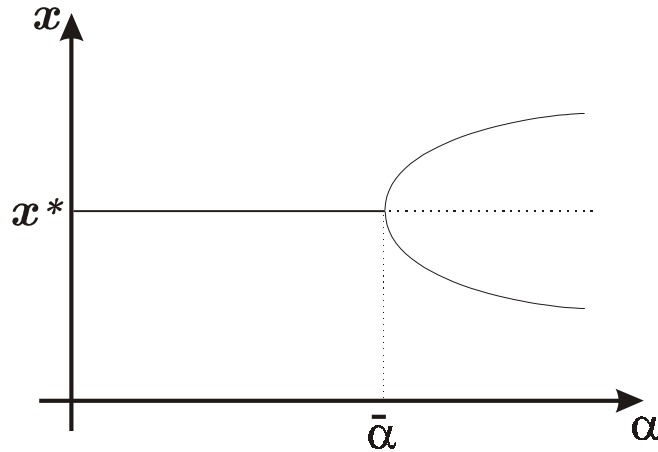


Figura 1.1: Un diagramma di biforcazione per una period-doubling.

È interessante confrontare ciò che avviene nel presente contesto con il sistema unidimensionale che risulta con α fissato. In quest'ultimo caso possiamo fare riferimento al diagramma di Figura 1.1 (che, con $0 < \alpha < 1$, può essere tracciato quando $F'(x^*) < -1$), dove, oltre un certo valore critico α , lo stato stazionario perde stabilità in favore di un ciclo di periodo due (biforcazione period doubling). Due punti vale la pena evidenziare: in primo luogo, come è facile mostrare, si tratta di cicli di *non* perfect foresight, nel senso che essi implicano che gli agenti commettano errori di previsione sistematici; in secondo luogo, questi cicli sono significativi poiché attraggono ogni punto per quanto vicino allo stato stazionario. Questo significa che gli agenti nel modello sono

condotti ad “apprendere” cicli lungo i quali le loro aspettative non si auto confermano; in definitiva, tale risultato implica che il processo di apprendimento si fermi, fatto questo, che risulta come indesiderata caratteristica del modello.

Ciò che farò nella prossima sezione sarà mostrare che, non appena, per α , viene introdotta una dinamica endogena che possiede determinate proprietà, la situazione muta radicalmente: in particolare vedremo che, per qualunque valore iniziale di α , partendo da aspettative sufficientemente vicine allo stato stazionario x^* , gli agenti saranno capaci di correggere le loro previsioni verso x^* : si verificherà così, un apprendimento effettivo fino ad una situazione di previsioni che si *auto-confermano* (*self-fulfilling prophecies*).

1.3 Alcuni fatti di analisi globale per una classe di funzioni aspettativa G

Riscriviamo il sistema analizzato nella sezione 1.2:

$$(P) : \begin{cases} x_{t+1}^e = E(x_t^e, \alpha_t) = x_t^e + \alpha_t(F(x_t^e) - x_t^e) \\ \alpha_{t+1} = G(x_t^e, \alpha_t) \end{cases}$$

Avremo bisogno delle seguenti ipotesi:

[A1]. (x^*, α^*) è un punto fisso asintoticamente stabile¹, localmente unico, per (P) ;

[A2]. F, G sono differenziabili con continuità;

[A3]. $\exists \gamma \in (0, 1) : |\alpha^* - G(x^*, \alpha_t)| < \gamma |\alpha^* - \alpha_t| \quad \forall \alpha_t \neq \alpha^*$.

L’ipotesi [A1] definisce l’oggetto dell’analisi; [A2] è l’usuale richiesta di regolarità; [A3] dice che se la variabile di stato x si trova nello stato stazionario, allora anche il parametro che identifica la funzione aspettativa deve tendere al suo valore di equilibrio. Risulta evidente che l’ipotesi [A3] si contrappone specularmente all’ipotesi (1.3). Nell’interpretazione di Fuchs α rappresenta la *visione del mondo* degli agenti; il fatto che questa muti è giustificato

¹Un sottoinsieme chiuso C dello spazio degli stati X , invariante attraverso una mappa P , si dice *Lyapunov stabile* se per ogni intorno V di C esiste un intorno $V' \subset V$ di C tale che $P(V') \subset V$. Inoltre C si dice *asintoticamente stabile* se è Lyapunov stabile e possiede un bacino di attrazione aperto $\mathfrak{B}(A)$. $\mathfrak{B}(A)$ è l’insieme di tutti i punti $x \in X$ tali che $P^n(x) \rightarrow A$ quando $x \rightarrow \infty$. In questo caso, tra l’altro, se consideriamo V tale che la sua chiusura sia contenuta in $\mathfrak{B}(A)$ risulta $A = \bigcap_{n>0} P^n(V)$. Per maggiori ragguagli vedi

[25, 32, 52, 53]

quando, in presenza di un errore, si vogliono ottenere previsioni migliori, ma questo obiettivo cessa di avere un senso quando il sistema si trova in x^* ; così risulta ragionevole chiedere che anche la dinamica di α debba giungere, contemporaneamente ad x , ad una situazione di equilibrio. Nel mondo disegnato da Fuchs ogni punto del tipo (x^*, α) , con α qualunque, rappresenta un equilibrio stazionario, che quindi non è localmente unico. Al contrario, nel nostro caso (come conseguenza dell'ipotesi [A3]) esiste un solo valore di α che mette in equilibrio il sistema, e quindi l'equilibrio sarà localmente unico se è localmente unico l'equilibrio di perfetta previsione x^* . Il fatto che per noi sia ragionevole chiedere che questo stato di equilibrio sia unico e non indeterminato come nel caso di Fuchs dipende dal modo in cui questi modelli vengono costruiti e dalla conseguente interpretazione che ne viene data. Nel caso specifico di una funzione aspettativa di tipo adattivo il coefficiente α rappresenta la memoria degli agenti, intesa anche come volontà di utilizzare i vecchi dati per formulare le nuove previsioni; non vi è alcun motivo per ritenere che il modo di trattare i vecchi dati rimanga immutato qualora gli agenti non abbiano commesso errori nell'ultimo periodo. Anzi, questo fatto potrebbe giustificare una maggiore considerazione dei dati passati, sulla base dei quali erano state formate le aspettative poi rivelatesi corrette. Ritorrerò più precisamente su questo fatto nel paragrafo 2.2.3.

Il Teorema 1.3 è il risultato principale di questa sezione. La sua dimostrazione richiede il Lemma seguente.

In quanto segue potremmo per semplicità considerare $x, \alpha \in \mathbb{R}$. Ciò rappresenta ovviamente una forzatura dal punto di vista dell'interpretazione economica. Viceversa potremmo considerare $x \in X$ e $\alpha \in \mathcal{A}$, dove X e \mathcal{A} rappresentano gli insiemi dei valori economicamente significativi per le variabili in oggetto. In questo caso, quando si indicherà che x appartiene ad un certo insieme I o che α appartiene ad un certo insieme J , intenderemo $x \in (I \cap X)$ e $\alpha \in (J \cap \mathcal{A})$ rispettivamente. Ovviamente, è necessario che X e \mathcal{A} siano tali da garantire che $(P) : (X \times \mathcal{A}) \rightarrow (X \times \mathcal{A})$.

Lemma 1.2 *Per il sistema (P) , date le ipotesi [A1], [A2] e [A3], per ogni $\hat{\alpha}_0 \neq \alpha^*$ esistono due successioni monotone $\{\hat{\alpha}_n\}, \hat{\alpha}_n \rightarrow +\infty$, $\{\hat{\beta}_n\}, \hat{\beta}_n \rightarrow -\infty$, $\hat{\alpha}_n > \hat{\beta}_n$ ed una successione positiva, non-crescente $\{\delta_n\}$, tale che*

$$\begin{aligned} (x_t, \alpha_t) &\in I_{\delta_{n+1}}(x^*) \times \left\{ [\hat{\alpha}_n, \hat{\alpha}_{n+1}] \cup [\hat{\beta}_{n+1}, \hat{\beta}_n] \right\} \\ &\quad \downarrow \\ (x_{t+1}, \alpha_{t+1}) &\in I_{\delta_n}(x^*) \times (\hat{\beta}_n, \hat{\alpha}_n) \end{aligned}$$

Dimostrazione.

Supponiamo, senza perdita di generalità, $\hat{\alpha}_0 > \alpha^*$ e sia γ tale che la [A3] risulti verificata. Sia $\hat{\beta}_0 = 2\alpha^* - \hat{\alpha}_0$, cioè il punto simmetrico di $\hat{\alpha}_0$ rispetto ad α^* . Consideriamo le successioni

$$\hat{\alpha}_{n+1} = \frac{\hat{\alpha}_n}{\gamma} - \frac{1-\gamma}{\gamma}\alpha^* \quad (1.14)$$

$$\hat{\beta}_{n+1} = \frac{\hat{\beta}_n}{\gamma} - \frac{1-\gamma}{\gamma}\alpha^* \quad (1.15)$$

Può essere facilmente verificato che $\{\hat{\alpha}_n\}$ è crescente e tende a $+\infty$, mentre $\{\hat{\beta}_n\}$ è decrescente e tende a $-\infty$. Sia adesso $[\hat{\alpha}_n, \hat{\alpha}_{n+1}] \cup [\hat{\beta}_{n+1}, \hat{\beta}_n] \equiv K_n$. Osserviamo che per ogni $\alpha_t \in K_n$ risulta

$$\begin{aligned} |\alpha^* - G(x^*, \alpha_t)| &= |\alpha^* - \alpha_{t+1}| < \\ &< \gamma |\alpha^* - \alpha_t| \leq \gamma |\alpha^* - \hat{\alpha}_{n+1}| = |\alpha^* - \hat{\alpha}_n| \end{aligned}$$

utilizzando [A3] e (1.14). Per continuità, dato un qualunque $\bar{\alpha} \in K_n$ possiamo trovare $\delta_{\bar{\alpha}} > 0$ tale che

$$|\alpha^* - G(x_t^e, \alpha_t)| < |\alpha^* - \hat{\alpha}_n| \quad (1.16)$$

per ogni $(x_t^e, \alpha_t) \in I_{\delta_{\bar{\alpha}}}(x^*, \bar{\alpha})$. Inoltre, esiste $\delta'_{n+1} > 0$ tale che $\delta_{\bar{\alpha}} \geq \delta'_{n+1} > 0$ per ogni $\bar{\alpha} \in K_n$: infatti, supponiamo il contrario; allora esisterebbe una successione $\{(x_j^e, \alpha_j)\} \rightarrow (x^*, \tilde{\alpha})$, $\tilde{\alpha} \in K_n$ per la quale

$$|\alpha^* - G(x_j^e, \alpha_j)| \geq \gamma |\alpha^* - \alpha_j| \quad j \in \mathbb{N}$$

ma questo contraddirebbe (1.16). Infine, per ogni $\delta_n > 0$ possiamo trovare $0 < \delta_{n+1} \leq \delta'_{n+1}$ tale che per ogni $(x_t^e, \alpha_t) \in I_{\delta_{n+1}}(x^*) \times K_n$

$$|x_{t+1}^e - x^*| \leq |x_t^e - x^*| + |\alpha_t| |F(x_t^e) - x_t^e| \leq |x_t^e - x^*| + |\hat{\alpha}_{n+1}| |F(x_t^e) - x_t^e| < \delta_n \quad (1.17)$$

poiché, data la continuità della F e dato che $F(x^*) = x^*$, è possibile rendere $|F(x_t^e) - x_t^e|$ arbitrariamente piccolo scegliendo un δ_{n+1} adeguato. Una rappresentazione grafica è data in figura 1.2. Notiamo che, usando (1.17), dobbiamo solamente fissare $\delta_0 > 0$ per ottenere ricorsivamente l'intera successione $\{\delta_n\}$. (1.16) e (1.17) mostrano che le due successioni godono delle proprietà richieste. Questo conclude la dimostrazione. ■

Passiamo adesso al teorema preannunciato.

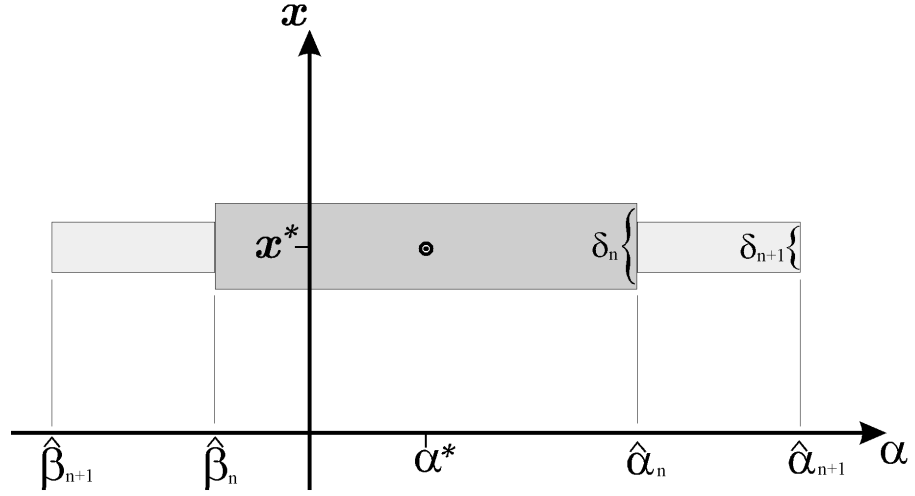


Figura 1.2: I punti della regione in grigio chiaro vengono portati dalla mappa, in un passo, nel rettangolo scuro.

Teorema 1.3 *Sotto le ipotesi [A1], [A2], [A3], per ogni $\alpha \in \mathcal{A}$ esiste un δ positivo (dipendente da α) tale che*

$$I_\delta(x^*) \times \{\alpha\} \subset \mathfrak{B}(x^*, \alpha^*) \quad (1.18)$$

dove $\mathfrak{B}(x^*, \alpha^*)$ è il bacino di attrazione di (x^*, α^*) .

Dimostrazione.

Grazie alla [A1] possiamo trovare un intorno quadrato di (x^*, α^*) appartenente a $\mathfrak{B}(x^*, \alpha^*)$: sia $\hat{\delta}$ la lunghezza del suo lato e definiamo $\hat{\beta} = \alpha^* - \hat{\delta}/2$, $\hat{\alpha} = \alpha^* + \hat{\delta}/2$. Supponiamo quindi che $\alpha \notin [\hat{\beta}, \hat{\alpha}]$. Consideriamo $\{\hat{\alpha}_n\}$, $\{\hat{\beta}_n\}$ e $\{\delta_n\}$ del Lemma 1.2 con $\hat{\alpha}_0 = \hat{\alpha}$, $\hat{\beta}_0 = \hat{\beta}$ e $\delta_0 = \hat{\delta}$. Allora possiamo trovare n tale che $\alpha \in [\hat{\alpha}_n, \hat{\alpha}_{n+1}] \cup [\hat{\beta}_{n+1}, \hat{\beta}_n]$. Quindi $\delta = \delta_{n+1}$ soddisfa (1.18). ■

L'interpretazione del Teorema 1.3 è immediata: uno stato stazionario, localmente unico e stabile attrarrà punti del tipo (x, α) per ogni α , purché x sia sufficientemente vicino ad x^* . La dimostrazione del Teorema, in maniera costruttiva, ci garantisce l'esistenza di una regione “a forma di occhio” immersa nel bacino di attrazione del punto fisso. La Figura 1.3 ne fornisce una rappresentazione. Questa situazione contrasta con il caso che si verifica, nel modello con α esogeno, quando α è più grande del suo valore di biforcazione.

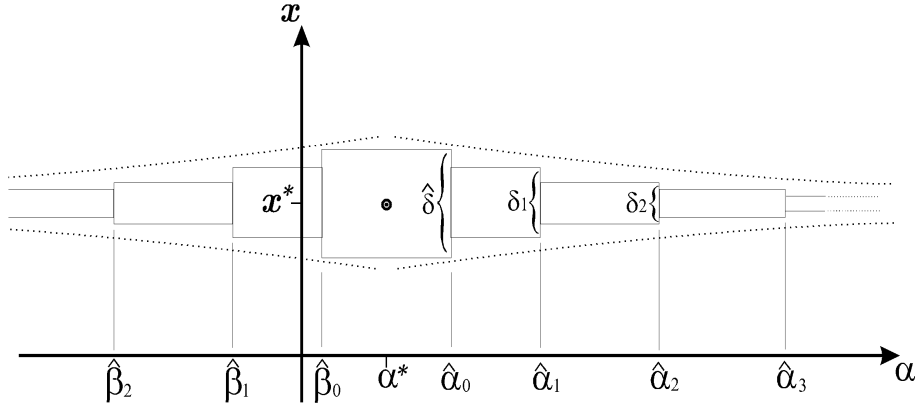


Figura 1.3: La regione immersa nel bacino di attrazione di (x^*, α^*) .

Così, introducendo un meccanismo endogeno di evoluzione della funzione aspettativa (attraverso l'aggiornamento del coefficiente che misura il peso attribuito ai passati valori osservati) nella maniera illustrata produce l'effetto di allargare l'insieme dei valori del parametro consistenti con una dinamica convergente all'equilibrio di *perfetta previsione*, eliminando al tempo stesso, almeno in un intorno di tale equilibrio, uno dei maggiore difetti del modello originale.

Osservazione 1.4 *Ai fini della dimostrazione del lemma 1.2 e quindi del teorema 1.3 l'ipotesi [A3] può essere leggermente indebolita. In effetti questa è necessaria per trascinare il sistema nelle vicinanze del punto fisso fino a quando non venga catturato nell'intorno da cui poi convergerà verso l'equilibrio. A tal fine è sufficiente chiedere che:*

$$[A4]. \forall \delta > 0 \exists \gamma \in (0, 1) : |\alpha^* - G(x^*, \alpha_t)| < \gamma |\alpha^* - \alpha_t| \quad \forall \alpha_t \notin I_\delta(\alpha^*)$$

Questa formulazione, simile ma non identica alla precedente, consente di ricomprendere casi che altrimenti sarebbero rimasti esclusi; in particolare tutti quei casi in cui la forza γ di avvicinamento tende a 1 quando ci si avvicina all'equilibrio (vedi ad esempio Bray [20], che incontreremo anche nel Paragrafo 2.2.2).

Osservazione 1.5 *Da adesso in poi indicheremo con \mathcal{G} l'insieme delle funzioni G che verifica le ipotesi [A1], [A2] e [A3] e con \mathcal{G}^* l'insieme delle funzioni G che verifica le ipotesi [A1], [A2] e [A4]; ovviamente sarà $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}^*$.*

A questo punto non è inutile porre in evidenza che tutte le *ELR* (anzi una più ampia famiglia \mathcal{G}^* di funzioni G di cui le *ELR* rappresentano un caso particolare) che verificano le ipotesi [A1], [A2] e [A4], soddisfano quanto richiesto nella Proposizione 1.1 ai punti 1) e 2). Infatti il teorema 1.3 afferma che, per ogni $\alpha > \bar{\alpha}$, per il quale quindi l'equilibrio x^* non è stabile per la mappa (1.7), esiste un intorno U di x^* tale per cui una legge di apprendimento G che soddisfa le tre ipotesi fa sì che il sistema (1.9) converga ad un equilibrio (x^*, α^*) , per ogni condizione iniziale (x, α) dove $x \in U$. Tornerò su ciò, nel caso più generale, con il Teorema 1.15. A questo punto dovremmo mostrare che l'insieme di queste funzioni G non è "piccolo", almeno in senso topologico. Considereremo questo problema una volta per tutte nel caso più generale affrontato nella sezione 1.4. In particolare attraverso tre teoremi (1.15, 1.18 e 1.21) vedremo che l'insieme \mathcal{G} , data una topologia ragionevole sull'insieme $\Gamma = \{G : \alpha_{t+1} = G(x_t^e, \alpha_t); G \in C^1\}$, ha interno non vuoto e, soprattutto, vedremo che ogni funzione di apprendimento del tipo considerato da Fuchs, può essere approssimata con la precisione voluta da una funzione appartenente all'insieme \mathcal{G} .

1.4 Il caso n-dimensionale

Come abbiamo anticipato, il risultato dato nel teorema (1.3) può essere facilmente esteso al caso n-dimensionale.

Poniamo quindi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$. Consideriamo un modello forward-looking,

$$\mathbf{x}_t = F(\mathbf{x}_{t+1}^e) = (F_1(\mathbf{x}_{t+1}^e), \dots, F_n(\mathbf{x}_{t+1}^e))$$

analizzato nell'ipotesi di razionalità limitata ed agente rappresentativo. Gli agenti formulino le proprie aspettative su ogni variabile come combinazione lineare convessa delle ultime previsioni effettuate e dell'ultimo valore osservato della variabile, $x_{i,t+1}^e = E_i(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t) = x_{i,t}^e + \alpha_{i,t}(x_{i,t-1} - x_{i,t}^e), i = 1 \dots n$, dove il peso $\alpha_{i,t}$ non sia dato ma venga aggiornato in ogni periodo sulla base di una legge del tipo $\boldsymbol{\alpha}_{t+1} = g(\mathbf{x}_t^e, \mathbf{x}_{t+1}^e, \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{x}_t, \boldsymbol{\alpha}_t) = G(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t) = (G_1(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t), \dots, G_n(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t))$, analogamente al caso unidimensionale.

Posto A la matrice diagonale con $\alpha_{i,i} = \alpha_i$, il sistema diventa

$$(M) : \begin{cases} \mathbf{x}_{t+1}^e = E(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t) = \mathbf{x}_t^e + A_t [F(\mathbf{x}_t^e) - \mathbf{x}_t^e] \\ \boldsymbol{\alpha}_{t+1} = G(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t) \end{cases} = \quad (1.19)$$

$$= \begin{cases} x_{1,t+1}^e = E_1(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t) = x_{1,t}^e + \alpha_{1,t} [F_1(\mathbf{x}_t^e) - x_{1,t}^e] \\ \dots \\ x_{n,t+1}^e = E_n(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t) = x_{n,t}^e + \alpha_{n,t} [F_n(\mathbf{x}_t^e) - x_{n,t}^e] \\ \alpha_{1,t+1} = G_1(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t) \\ \dots \\ \alpha_{n,t+1} = G_n(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t) \end{cases} \quad (1.20)$$

Anche in questo caso, se un vettore $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*)$ con $\alpha_i^* \neq 0, \forall i$, è uno stato stazionario per il sistema (M), allora il vettore \mathbf{x}^* è un equilibrio per la mappa $\mathbf{x}_t = F(\mathbf{x}_{t+1}^e)$, ovvero è un equilibrio del modello analizzato nell'ipotesi di aspettative razionali. In tale ipotesi, la matrice Jacobiana di (1.19), valutata in $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*)$ risulta

$$M'(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*) = \begin{pmatrix} E'(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*) & 0 \\ G_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*) & G_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*) \end{pmatrix}$$

dove con E' si indica la matrice jacobiana del modello con $\boldsymbol{\alpha}$ costante, mentre con $G_{\mathbf{x}}$ e $G_{\boldsymbol{\alpha}}$ si indicano rispettivamente le matrici ottenute derivando la funzione G rispetto alle componenti del vettore \mathbf{x} e rispetto alle componenti del vettore $\boldsymbol{\alpha}$. Le condizioni di stabilità dell'equilibrio risultano così più stringenti rispetto al caso con $\boldsymbol{\alpha}$ fissato. In particolare, nel caso in cui gli agenti aggiornino il valore di α_i senza tenere in considerazione il valore assunto dagli altri $\alpha_j, j \neq i$, lo stato stazionario $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*)$ sarà stabile per il sistema (1.19) se:

1. \mathbf{x}^* è un equilibrio stabile per il modello con $\boldsymbol{\alpha}$ fissato quando $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^*$
2. $-1 < \frac{\partial G_i}{\partial \alpha_i}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*) < 1, i = 1 \dots n$.

Forniamo adesso il risultato generale.

Teorema 1.6 *Siano date le seguenti ipotesi:*

[B1]. $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*)$ è un punto fisso asintoticamente stabile, localmente unico, per (M);

[B2]. $F, G \in C^1$;

[B3]. $\exists \gamma \in (0,1) : \|\boldsymbol{\alpha}^* - G(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}_t)\| < \gamma \|\boldsymbol{\alpha}^* - \boldsymbol{\alpha}_t\| \quad \forall \boldsymbol{\alpha}_t \neq \boldsymbol{\alpha}^*$, dove $\|\cdot\|$ rappresenta la norma euclidea.

Allora, per ogni $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ esiste $\delta > 0$ (dipendente da $\boldsymbol{\alpha}$) tale che

$$B_\delta(\mathbf{x}^*) \times \{\boldsymbol{\alpha}\} \subset \mathfrak{B}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*) \quad (1.21)$$

dove $B_\delta(\mathbf{x}^*)$ è una palla di raggio δ centrata in \mathbf{x}^* .

Dimostrazione.

Seguendo il procedimento utilizzato nella dimostrazione del Lemma 1.2 e del Teorema 1.3 costruiamo, attraverso un procedimento di induzione all'indietro, una sequenza di intorno dello stato stazionario che appartengono al suo bacino di attrazione.

Per l'ipotesi [B1], esistono $\delta_0, \mu_0 > 0$, tali che

$$I_0(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*) = \{B_{\delta_0}(\mathbf{x}^*) \times B_{\mu_0}(\boldsymbol{\alpha}^*)\} \subset \mathfrak{B}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*)$$

Sia dato un $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_0 \neq \boldsymbol{\alpha}^*$ tale che $\mu_0 \geq \|\boldsymbol{\alpha}^* - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_0\|$ e sia γ tale che [B3] risulti verificata. Consideriamo la successione di vettori

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{n+1} = \frac{\hat{\boldsymbol{\alpha}}_n - (1 - \gamma)\boldsymbol{\alpha}^*}{\gamma} \quad (1.22)$$

Risulta che

$$\|\boldsymbol{\alpha}^* - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{n+1}\| = \left\| \boldsymbol{\alpha}^* - \frac{\hat{\boldsymbol{\alpha}}_n - (1 - \gamma)\boldsymbol{\alpha}^*}{\gamma} \right\| = \left\| \frac{\boldsymbol{\alpha}^* - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_n}{\gamma} \right\| = \frac{1}{\gamma} \|\boldsymbol{\alpha}^* - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_n\|$$

e quindi $\{\mu_n\} \equiv \{\|\boldsymbol{\alpha}^* - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_n\|\}$ è una successione monotona crescente tendente a $+\infty$.

Adesso consideriamo $C_n \equiv \{B_{\mu_{n+1}}(\boldsymbol{\alpha}^*) - B_{\mu_n}(\boldsymbol{\alpha}^*)\}$, e si indichi con $\overline{C_n}$ la sua chiusura. Per ogni $\boldsymbol{\alpha}_t \in \overline{C_n}$, grazie alla [B3] e alla (1.22), si ha

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\alpha}^* - G(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}_t)\| &= \|\boldsymbol{\alpha}^* - \boldsymbol{\alpha}_{t+1}\| < \gamma \|\boldsymbol{\alpha}^* - \boldsymbol{\alpha}_t\| \leq \gamma \|\boldsymbol{\alpha}^* - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{n+1}\| = \\ &= \|\gamma \boldsymbol{\alpha}^* - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_n + (1 - \gamma)\boldsymbol{\alpha}^*\| = \|\boldsymbol{\alpha}^* - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_n\| = \mu_n \end{aligned}$$

Per continuità, dato un qualunque $\boldsymbol{\alpha} \in \overline{C_n}$ possiamo trovare $\delta_\alpha > 0$ tale che

$$\|\boldsymbol{\alpha}^* - G(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t)\| < \|\boldsymbol{\alpha}^* - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_n\| = \mu_n \quad (1.23)$$

per ogni $(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t) \in B_{\delta_\alpha}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha})$. Osserviamo che esiste $\delta'_{n+1} > 0$ tale che $\delta_\alpha \geq \delta'_{n+1} > 0$ per ogni $\boldsymbol{\alpha} \in \overline{C_n}$; infatti, se così non fosse, esisterebbe una successione $\{(\mathbf{x}_j^e, \boldsymbol{\alpha}_j)\} \rightarrow \{(\mathbf{x}^*, \tilde{\boldsymbol{\alpha}})\}$ con $\tilde{\boldsymbol{\alpha}} \in \overline{C_n}$ tale che

$$\|\boldsymbol{\alpha}^* - G(\mathbf{x}_j^e, \boldsymbol{\alpha}_j)\| \geq \gamma \|\boldsymbol{\alpha}^* - \boldsymbol{\alpha}_j\| \quad j \in \mathbb{N} \quad (1.24)$$

in contraddizione con (1.23). Infine, data A_t la matrice diagonale con gli elementi del vettore $\boldsymbol{\alpha}_t$ sulla diagonale principale e $M(\boldsymbol{\alpha}_t) = \max_{i=1\dots n} \{|\alpha_{i,t}|\}$, esiste $0 < \delta_{n+1} \leq \delta'_{n+1}$ tale che per ogni $(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\alpha}_t) \in B_{\delta_{n+1}}(\mathbf{x}^*) \times \overline{C_n}$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{t+1}^e - \mathbf{x}^*\| &\leq \|\mathbf{x}_t^e - \mathbf{x}^*\| + \|A_t(F(\mathbf{x}_t^e) - \mathbf{x}_t^e)\| \leq \\ &\leq \|\mathbf{x}_t^e - \mathbf{x}^*\| + M(\boldsymbol{\alpha}_t) \|(F(\mathbf{x}_t^e) - \mathbf{x}_t^e)\| < \delta_n \end{aligned} \quad (1.25)$$

grazie alla continuità di F e dato che $F(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$ e grazie al fatto che, poiché

$$|\alpha_i| = |\alpha_i - \alpha_i^* + \alpha_i^*| < |\alpha_i - \alpha_i^*| + |\alpha_i^*| \leq \mu_{n+1} + |\alpha_i^*|$$

risulta

$$M(\boldsymbol{\alpha}_t) \leq \max_{i=1\dots n} \{\mu_{n+1} + |\alpha_i^*|\} = M_n(\boldsymbol{\alpha}^*)$$

A questo punto dati i $\delta_0, \mu_0 > 0$, grazie alle (1.23) e (1.25) siamo in grado di identificare ricorsivamente una successione $\{(\delta_n, \mu_n)\}$, dove $\{\delta_n\}$ è decrescente e $\{\mu_n\}$ è crescente e diverge a $+\infty$, tale che se $(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\alpha}_t) \in \{B_{\delta_{n+1}}(\mathbf{x}^*) \times \overline{C_n}\}$ allora $(\mathbf{x}_{t+1}, \boldsymbol{\alpha}_{t+1}) \in \{B_{\delta_n}(\mathbf{x}^*) \times B_{\mu_n}(\boldsymbol{\alpha}^*)\}$. Quindi dato $\boldsymbol{\alpha}$ la successione appena definita ci consente di individuare un n tale che $\boldsymbol{\alpha} \in \overline{C_n}$ ed in corrispondenza un $\delta = \delta_{n+1}$ tale che per ogni $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}^*)$ il sistema porta il punto $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$ in $I_0(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*) = \{B_{\delta_0}(\mathbf{x}^*) \times B_{\mu_0}(\boldsymbol{\alpha}^*)\} \subset \mathfrak{B}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*)$, in un numero finito di passi (al più n). Ciò conclude la dimostrazione. ■

Osservazione 1.7 Anche in questo caso come per il caso unidimensionale, possiamo notare che ai fini della dimostrazione del Teorema 1.6 l'ipotesi [B3] può essere leggermente indebolita. In effetti è richiesto che:

[B4]. $\forall \mu > 0 \exists \gamma \in (0, 1) : \|\boldsymbol{\alpha}^* - G(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}_t)\| < \gamma \|\boldsymbol{\alpha}^* - \boldsymbol{\alpha}_t\| \quad \forall \boldsymbol{\alpha}_t \notin B_\mu(\boldsymbol{\alpha}^*)$, dove $\|\cdot\|$ rappresenta la norma euclidea e $B_\mu(\boldsymbol{\alpha}^*)$ è una palla di raggio μ centrata in $\boldsymbol{\alpha}^*$.

In questo modo possiamo trovare $\hat{\mu}$ e un corrispondente $\hat{\gamma}$ tale che la [B4] è verificata e al tempo stesso $B_{\hat{\mu}}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*)$ sia contenuto strettamente nel bacino di attrazione $\mathfrak{B}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*)$; il che è sufficiente per dimostrare il teorema.

A questo punto non resta che da stabilire, con i tre teoremi seguenti, il collegamento con la Proposizione 1.1. È necessaria una premessa. Dovendo adesso dotare di una topologia l'insieme delle funzioni cui siamo interessati, sarebbe tutto più semplice se restringessimo l'analisi ad un insieme di funzioni uniformemente limitate o, altrimenti, definite su di un compatto, nel qual caso sarebbe possibile dare la topologia naturale τ_1 della C^1 -convergenza uniforme. Quanto una scelta del genere possa essere giustificata in ambito economico è argomento ampiamente dibattuto e nel quale non è mio interesse addentrarmi. La strategia che seguirò sarà quella di mantenermi in un ambito più generale al costo di dover dotare lo spazio di una metrica "speciale", salvo poi discutere i risultati alla luce della possibile scelta alternativa.

Indichiamo quindi con \mathcal{F} l'insieme delle funzioni C^1 definite su \mathbb{R}^m ed a valori in \mathbb{R}^n . Su tale insieme definiamo una funzione distanza nel modo seguente:

Definizione 1.8 *Sia assegnata una successione telescopica di compatti $K_i \subset K_{i+1}$ tale che $\bigcup_i K_i = \mathbb{R}^m$. Su ogni compatto K_i della successione è definito il*

$$\max_{x \in K_i} (\|f(x)\| + \|Df(x)\|)$$

dove $\|f(x)\|$ è la norma euclidea in \mathbb{R}^n e $\|Df(x)\|$ è la norma della matrice Jacobiana $Df(x)$ definita da

$$\|Df(x)\| = \max_{\|v\|=1} \|Df(x)v\|$$

Sia definita la funzione, $d: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$, come:

$$d(f, g) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\max_{x \in K_i} (\|f(x) - g(x)\| + \|Df(x) - Dg(x)\|)}{1 + \max_{x \in K_i} (\|f(x) - g(x)\| + \|Df(x) - Dg(x)\|)}$$

Proposizione 1.9 *La funzione $d(f, g)$ sopra definita è una distanza.*

Dimostrazione.

Infatti $d(f, g) \geq 0$ e inoltre $f \neq g$ implica che esiste k_i tale che

$$\max_{x \in K_i} (\|f(x) - g(x)\| + \|Df(x) - Dg(x)\|) > 0$$

da cui necessariamente $d(f, g) > 0$.

Che $d(f, g) = d(g, f)$ si verifica banalmente.

Infine $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$. Infatti, dato un compatto K_i , sia $\tau_{1,i}$ la metrica della C^1 -convergenza uniforme per le funzioni a valori in K_i . Poiché la funzione $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$ è crescente e valendo, per la metrica $\tau_{1,i}$, la disuguaglianza triangolare si ha

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{1,i}(f, g)}{1 + \tau_{1,i}(f, g)} &\leq \frac{\tau_{1,i}(f, h) + \tau_{1,i}(h, g)}{1 + \tau_{1,i}(f, h) + \tau_{1,i}(h, g)} = \\ &= \frac{\tau_{1,i}(f, h)}{1 + \tau_{1,i}(f, h) + \tau_{1,i}(h, g)} + \frac{\tau_{1,i}(h, g)}{1 + \tau_{1,i}(f, h) + \tau_{1,i}(h, g)} \leq \\ &\leq \frac{\tau_{1,i}(f, h)}{1 + \tau_{1,i}(f, h)} + \frac{\tau_{1,i}(h, g)}{1 + \tau_{1,i}(h, g)} \end{aligned}$$

da cui passando al limite si ottiene il risultato. ■

Osservazione 1.10 *Questa funzione distanza ricorda molto da vicino una Metrica di Poincaré² (senza esserlo, poiché al limite la grandezza al numeratore non è una distanza) e verrà indicata da ora in poi con τ_p .*

Osservazione 1.11 *Vale la pena osservare che $\tau_p(f, g) \leq 1$ per ogni f, g appartenenti a \mathcal{F} .*

Osservazione 1.12 *Si osservi che l'insieme \mathcal{F} dotato della metrica τ_p non ammette una norma che subordini tale distanza, giacché*

$$|\lambda| \tau_p(f, 0) \neq \tau_p(\lambda f, 0)$$

Vale la pena dimostrare la seguente proposizione:

Proposizione 1.13 *La distanza τ_p non dipende dalla successione telescopica di compatti assegnata*

Dimostrazione.

Sia B_j una successione di compatti telescopica e tale che $\bigcup_i B_i = \mathbb{R}^m$. Sia d_B la distanza definita tramite i $\{B_j\}$ e d_k quella definita tramite i $\{K_i\}$.

²Dato un insieme A e definita una funzione distanza $d : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$, la funzione $d_P : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $d_P = \frac{d}{d+1}$ prende il nome di *Metrica di Poincaré*. Si dimostra che d_P è una distanza, che è a valori in $[0, 1)$ (banalmente) e che gli spazi topologici (A, \mathcal{T}_d) e (A, \mathcal{T}_{d_P}) sono omeomorfi.

Se esistessero f e g tali che $d_k(f, g) \neq d_B(f, g)$, s.p.d.g. $d_k(f, g) < d_B(f, g)$, fissato $\varepsilon > 0$ esisterebbe $n(\varepsilon)$ tale che

$$\left| \frac{\max_{x \in B_j} (\|f(x) - g(x)\| + \|Df(x) - Dg(x)\|)}{1 + \max_{x \in B_j} (\|f(x) - g(x)\| + \|Df(x) - Dg(x)\|)} - d_B(f, g) \right| < \varepsilon \quad (1.26)$$

per ogni $j > n(\varepsilon)$. Esisterebbe dunque un \bar{x} per il quale

$$\left| \frac{(\|f(\bar{x}) - g(\bar{x})\| + \|Df(\bar{x}) - Dg(\bar{x})\|)}{1 + (\|f(\bar{x}) - g(\bar{x})\| + \|Df(\bar{x}) - Dg(\bar{x})\|)} - d_B(f, g) \right| < \varepsilon$$

Ma contemporaneamente esiste un K_{i_0} tale che $\bar{x} \in K_{i_0}$ e inoltre

$$\frac{\max_{x \in K_{i_0}} (\|f(x) - g(x)\| + \|Df(x) - Dg(x)\|)}{1 + \max_{x \in K_{i_0}} (\|f(x) - g(x)\| + \|Df(x) - Dg(x)\|)} < d_K(f, g) \quad (1.27)$$

E quindi mettendo insieme (1.26) e (1.27) si ottiene

$$d_K(f, g) > d_B(f, g) - \varepsilon$$

che è assurdo per l'arbitrarietà di ε . ■

Osservazione 1.14 *Si osservi che*

$$\|f(x) - g(x)\| + \|Df(x) - Dg(x)\| < \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^m$$

implica $\tau_p(f, g) < \varepsilon$ e che, viceversa, se $\tau_p(f, g) < \sigma$ allora per ogni $x \in \mathbb{R}^m$ vale la

$$\|f(x) - g(x)\| + \|Df(x) - Dg(x)\| < \frac{\sigma}{1 - \sigma}$$

che è minore di 2σ per $\sigma < \frac{1}{2}$. In altre parole due funzioni sono vicine nella metrica τ_P se e solo se sono puntualmente ε -vicine ovunque.

Adesso, utilizzando la topologia indotta su Γ dalla distanza τ_P , possiamo procedere verso i risultati che ci interessano.

Faccio anche notare che, rispetto all'enunciazione di Fuchs e a quanto stabilito con l'ipotesi [A1] e [B1] dei teoremi 1.3 e 1.6, in quanto segue si richiede che $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*)$ sia iperbolico attrattivo e non solo asintoticamente stabile. Non

si tratta di una eccessiva restrizione in quanto dato \mathcal{F}_y , lo spazio delle funzioni C^1 uniformemente limitate che hanno un punto fisso in \mathbf{y} , e data su \mathcal{F}_y la topologia indotta da τ_1 , \mathcal{F}_y^{Hyp} (il sottoinsieme di \mathcal{F}_y delle funzioni che sono iperboliche in \mathbf{y}) è aperto e denso in \mathcal{F}_y .

È immediato verificare che tutte le leggi di apprendimento che verificano le tre ipotesi del Teorema 1.6 appartengono alla famiglia \mathcal{L} indicata nella Proposizione 1.1.

Teorema 1.15 *Sia \mathbf{x}^* un equilibrio di aspettative razionali, localmente unico, per la mappa (1.4), $\mathcal{E}(\mathbf{x}^*)$ l'insieme delle funzioni aspettativa (1.6), parametrizzate da $\boldsymbol{\alpha}$, per le quali \mathbf{x}^* è un equilibrio temporaneo iperbolico attrattivo. Sia \mathcal{G}^* l'insieme delle funzioni di apprendimento $G(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t)$ che verificano le ipotesi [B1], [B2] e [B4]. Sia $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{G}^*$ l'insieme delle leggi di apprendimento per le quali, data la mappa,*

$$(M) : \begin{cases} \mathbf{x}_{t+1}^e = E(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t) = \mathbf{x}_t^e + A_t [F(\mathbf{x}_t^e) - \mathbf{x}_t^e] \\ \boldsymbol{\alpha}_{t+1} = G(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t) \end{cases}$$

esiste un intorno U di \mathbf{x}^* tale che:

1) le traiettorie $\{\mathbf{y}_t\} = \{\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\alpha}_t\}$ determinate dalla condizione iniziale $\mathbf{y}_0 = (\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}_0)$ con \mathbf{x}_0 in U e $\boldsymbol{\alpha}_0$ in $\mathcal{E}(\mathbf{x}^*)$, convergono all'equilibrio iperbolico attrattivo $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*)$ con $\boldsymbol{\alpha}^* \in \mathcal{E}(\mathbf{x}^*)$;

2) esistono traiettorie $\{\mathbf{y}_t\}$ determinate da condizioni iniziali $\mathbf{y}_0 = (\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}_0)$ con \mathbf{x}_0 in U e $\boldsymbol{\alpha}_0$ non appartenente a $\mathcal{E}(\mathbf{x}^*)$, che comunque convergono a $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*)$ con $\boldsymbol{\alpha}^* \in \mathcal{E}(\mathbf{x}^*)$;

allora $\mathcal{L} = \mathcal{G}^*$.

Dimostrazione.

Se $\mathcal{E}(\mathbf{x}^*) = \mathcal{A}$ la questione è irrilevante poiché tutte le condizioni iniziali sono del tipo con $\boldsymbol{\alpha}_0 \in \mathcal{E}(\mathbf{x}^*)$.

Se, viceversa, esiste un $\boldsymbol{\alpha}$ che appartiene ad \mathcal{A} ma non a $\mathcal{E}(\mathbf{x}^*)$, il risultato è immediato. Infatti, poiché per ipotesi tutte le funzioni G appartenenti a \mathcal{G}^* soddisfano le tre ipotesi [B1], [B2] e [B4], che per l'Osservazione 1.7 sono sufficienti a dimostrare il Teorema 1.6, per ognuna di esse, dato $\boldsymbol{\alpha}$, è possibile individuare un $\delta > 0$ (dipendente da $\boldsymbol{\alpha}$) tale che le traiettorie $\{\mathbf{y}_t\}$ generate dalla mappa (M) e determinate dalla condizione iniziale $\mathbf{y}_0 = (\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}_0)$ con \mathbf{x}_0 appartenente ad un intorno U di \mathbf{x}^* di ampiezza δ e $\boldsymbol{\alpha}_0$ appartenente alla chiusura di un intorno I di $\boldsymbol{\alpha}^*$ di ampiezza $\|\boldsymbol{\alpha}^* - \boldsymbol{\alpha}\|$, convergono all'equilibrio iperbolico attrattivo $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*)$ con $\boldsymbol{\alpha}^* \in \mathcal{E}(\mathbf{x}^*)$. Quindi per ogni $G \in \mathcal{G}^*$

si ha che $G \in \mathcal{L}$, da cui $\mathcal{G}^* \subseteq \mathcal{L}$ e poiché per ipotesi $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{G}^*$, si ottiene il risultato. ■

Dunque se si fa cadere l'ipotesi (1.3) di Fuchs e la si sostituisce con la [A4] o [B4], per altro, come abbiamo visto, più ragionevole in certi contesti, il risultato negativo in [31] viene completamente ribaltato.

In effetti si può dire ancora di più. Come ho anticipato nella sezione 1.3 le leggi di apprendimento del tipo considerato sono “non poche”, in senso topologico, anche nell'insieme più generale possibile di tutte le funzioni $G(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t)$ differenziabili con continuità. È quanto proveremo adesso con il Teorema 1.18.

Per giungere al risultato voluto è necessario dimostrare i due Lemmata seguenti.

Lemma 1.16 *Sia $f \in \mathcal{F}$. Sono equivalenti le due affermazioni seguenti:*

a) *f è una contrazione di costante γ , ovvero*

$$d(f(x), f(y)) \leq \gamma d(x, y)$$

dove d è la distanza euclidea

b) *f è tale che*

$$\|Df(x)\| < \gamma \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n$$

Dimostrazione.

(a \Rightarrow b)

Sia quindi f una contrazione di costante γ , si deve provare che $\|Df(x)v\| < \gamma$ per ogni $\|v\| = 1$. D'altra parte, poiché

$$\|Df(x)v\| = \left\| \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \right\| < \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma \|tv\|}{|t|} = \gamma$$

l'affermazione è provata.

(b \Rightarrow a)

Si deve stimare $\|f(x) - f(y)\|$. Risulta:

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x + t(y-x)) dt = \int_0^1 Df(x + t(y-x))(y-x) dt$$

da cui

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(y)\| &\leq \int_0^1 \|Df(x + t(y-x))\| \|y-x\| dt < \\ &< \int_0^1 \gamma \|y-x\| dt = \gamma \|y-x\|\end{aligned}$$

Ciò conclude la dimostrazione. ■

Lemma 1.17 *Sia $f \in \mathcal{F}$ una contrazione di costante γ . Per ogni ε tale che $\gamma + \varepsilon < 1$, esiste un δ_ε tale che*

$$\tau_p(f, g) < \delta_\varepsilon \implies g \text{ è una contrazione di costante } \beta < \gamma + \varepsilon$$

Dimostrazione.

Sia f una contrazione di coefficiente γ e sia $g \in \mathcal{F}$ tale che $\tau_p(f, g) < \varepsilon$. Dalla definizione di τ_p segue che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ è (vedi osservazione 1.14)

$$\|Df(x) - Dg(x)\| < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} < 2\varepsilon \quad \text{se} \quad \varepsilon < \frac{1}{2}$$

Pertanto per $\varepsilon < \frac{1}{2}$ è:

$$\| \|Df(x)\| - \|Dg(x)\| \| < \|Df(x) - Dg(x)\| < 2\varepsilon$$

da cui

$$\|Dg(x)\| < \|Df(x)\| + 2\varepsilon$$

Per il lemma 1.16, scelto ε tale che $\gamma + 2\varepsilon < 1$, segue che g è una contrazione, come richiesto. ■

A questo punto possiamo dimostrare il risultato che ci interessa.

Teorema 1.18 *Sia \mathbf{x}^* un equilibrio stazionario di aspettative razionali, localmente unico, per la mappa (1.4), $\mathcal{E}(\mathbf{x}^*)$ l'insieme delle funzioni aspettativa (1.6), parametrizzate da $\boldsymbol{\alpha}$, per le quali \mathbf{x}^* è un equilibrio temporaneo stazionario iperbolico attrattivo. Sia \mathcal{G} l'insieme delle funzioni di apprendimento $G(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t)$ per le quali il sistema (M) verifica le ipotesi da [B1] a [B3]. Sia data sull'insieme $\Gamma = \{G : \boldsymbol{\alpha}_{t+1} = G(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t); G \in C^1\}$, delle funzioni di apprendimento differenziabili con continuità, la topologia indotta da τ_p .*

Allora \mathcal{G} è un sottoinsieme di Γ con interno non vuoto.

Dimostrazione.

Per mostrare che non è vuoto basta considerare la legge

$$\hat{G}(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t) = \boldsymbol{\alpha}^* + \gamma_1(\boldsymbol{\alpha}_t - \boldsymbol{\alpha}^*)$$

dove $\boldsymbol{\alpha}^*$ appartiene a $\mathcal{E}(\mathbf{x}^*)$ e $\gamma_1 \in (0, 1)$. È immediato verificare che la mappa (M) corrispondente soddisfa le tre ipotesi [B1], [B2] e [B3] (quest'ultima per ogni $\gamma_1 < \gamma < 1$) e quindi che $\hat{G} \in \mathcal{G}$.

Vogliamo far vedere che esiste un intorno di \hat{G} tutto costituito da funzioni che appartengono a \mathcal{G} .

Innanzitutto osserviamo che la funzione \hat{G} è una contrazione. Infatti

$$\begin{aligned} \left\| \hat{G}(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\alpha}_1) - \hat{G}(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\alpha}_2) \right\| &= \left\| [\boldsymbol{\alpha}^* + \gamma_1(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}^*)] - [\boldsymbol{\alpha}^* + \gamma_1(\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}^*)] \right\| = \\ &= \left\| \gamma_1(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2) \right\| = |\gamma_1| \left\| \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 \right\| \leq \\ &\leq |\gamma_1| \left\| (\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\alpha}_1) - (\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\alpha}_2) \right\| \end{aligned}$$

Allora per il Lemma 1.17 esiste un intorno di \hat{G} tale che ogni funzione appartenente ad esso è ancora una contrazione.

Adesso, sia J un ε -intorno di \hat{G} in Γ per la topologia τ_p . Poiché un punto fisso iperbolico è, localmente, C^1 -strutturalmente stabile, esiste un ε adeguato tale che, per ogni G^j appartenente all'intorno J di \hat{G} di ampiezza ε , la mappa

$$(M^j) : \begin{cases} \mathbf{x}_{t+1}^e = E(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t) = \mathbf{x}_t^e + A_t [F(\mathbf{x}_t^e) - \mathbf{x}_t^e] \\ \boldsymbol{\alpha}_{t+1} = G^j(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t) \end{cases}$$

possiede ancora un punto fisso iperbolico $(\mathbf{x}^{*j}, \boldsymbol{\alpha}^{*j})$. Questo è tale che $\mathbf{x}^{*j} = \mathbf{x}^*$ poiché per l'iperbolicità deve essere $\alpha_i^{*j} \neq 0$ per ogni i , da cui $\boldsymbol{\alpha}^{*j} \in \mathcal{E}(\mathbf{x}^*)$. Quindi per ogni $G^j \in J$, (M^j) verifica la [B1] per il punto $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^{*j})$. La [B2] è banalmente verificata. Per quanto riguarda la [B3] osserviamo che per ε sufficientemente piccolo le funzioni in J sono tutte contrazioni per cui data G^j esiste γ_j tale che

$$\begin{aligned} \left\| \boldsymbol{\alpha}^* - G^j(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}_t) \right\| &= \left\| G^j(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*) - G^j(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}_t) \right\| \leq \\ &\leq |\gamma_j| \left\| (\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*) - (\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}_t) \right\| = |\gamma_j| \left\| \boldsymbol{\alpha}^* - \boldsymbol{\alpha}_t \right\| \end{aligned}$$

dove $\|\cdot\|$ è la norma euclidea. Quindi esiste un intorno di $\hat{G} \in \mathcal{G}$ tutto costituito da funzioni $G^j \in \mathcal{G}$. Ciò conclude la dimostrazione. ■

Osservazione 1.19 *La dimostrazione del teorema precedente così come quella dei due Lemmata su cui si fonda, non è condizionata in maniera pesante dalla topologia scelta. Restringendo l'analisi all'insieme delle funzioni definite in un compatto e differenziabili con continuità, dotato della metrica τ_1 della C^1 -convergenza uniforme, il risultato resterebbe valido e le dimostrazioni potrebbero essere replicate con pochi cambiamenti.*

Osservazione 1.20 *Il fatto che la dimostrazione sia costruita intorno alla funzione \hat{G} non deve trarre in inganno. In effetti \hat{G} non è che un rappresentante della classe delle funzioni che avrebbero fatto al nostro caso, ovvero tutte le funzioni $G(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t)$ tali che $G(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*) = \boldsymbol{\alpha}^*$ con $\boldsymbol{\alpha}^*$ appartenente a $\mathcal{E}(\mathbf{x}^*)$ e tali che siano una contrazione nel sottospazio individuato dalla condizione $\mathbf{x}_t^e = \mathbf{x}^*$. Come è facile intuire \hat{G} non è l'unico elemento di tale insieme.*

Resta da compiere l'ultimo passo. Dopo aver dimostrato che tutte le funzioni appartenenti alla classe individuata dalle proprietà da [B1] a [B3] garantiscono un aumento della stabilità del sistema e che queste sono un sottoinsieme “non piccolo” in senso topologico, vediamo adesso che ogni ELR che verifica la proprietà (1.3) può essere approssimata da una della nostra classe con la precisione voluta.

Teorema 1.21 *Sia \mathbf{x}^* un equilibrio stazionario di aspettative razionali, localmente unico, per la mappa (1.4), $\mathcal{E}(\mathbf{x}^*)$ l'insieme delle funzioni aspettativa (1.6), parametrizzate da $\boldsymbol{\alpha}$, per le quali \mathbf{x}^* è un equilibrio temporaneo stazionario iperbolico attrattivo. Sia \mathcal{G} l'insieme delle funzioni di apprendimento $G(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t)$ per le quali il sistema (M) verifica le ipotesi [B1], [B2] e [B3]. Sia $\mathcal{G}_F \subset \Gamma$ l'insieme delle funzioni di apprendimento $G_F(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t)$ che verificano la proprietà $G_F(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}_t) = \boldsymbol{\alpha}_t$. Sia $\Gamma = \{G : \boldsymbol{\alpha}_{t+1} = G(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t); G \in C^1\}$ l'insieme delle funzioni di apprendimento differenziabili con continuità.*

Allora, per ogni $G_F \in \mathcal{G}_F \subset \Gamma$ esiste una successione $\{G_n\}$, con $G_n \in \mathcal{G} \subset \Gamma$ per ogni n , tale che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t) = G_F(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t) \quad \text{per ogni } (\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t)$$

Dimostrazione.

Consideriamo una $\boldsymbol{\alpha}_{t+1} = G_F(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}_t) \in \mathcal{G}_F$. Sia $\boldsymbol{\alpha}^* \in \mathcal{E}(\mathbf{x}^*)$. Poniamo

$$G_n(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}_t) = \frac{1}{n}\boldsymbol{\alpha}^* + \left(1 - \frac{1}{n}\right)G_F(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}_t)$$

È banale mostrare che gli elementi di tale successione convergono puntualmente a G_F .

Verifichiamo adesso che $G_n \in \mathcal{G}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$:

- Per quanto riguarda la [B1] si ha

$$G_n(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*) = \frac{1}{n}\boldsymbol{\alpha}^* + \left(1 - \frac{1}{n}\right)G_F(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*) = \frac{1}{n}\boldsymbol{\alpha}^* + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\boldsymbol{\alpha}^* = \boldsymbol{\alpha}^*$$

quindi $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*)$ è un equilibrio stazionario per la mappa

$$(M_n) : \begin{cases} \mathbf{x}_{t+1}^e = E(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t) = \mathbf{x}_t^e + A_t[F(\mathbf{x}_t^e) - \mathbf{x}_t^e] \\ \boldsymbol{\alpha}_{t+1} = G_n(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t) \end{cases}$$

inoltre consideriamo $G_{n,\alpha}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*)$, ovvero la matrice delle derivate parziali di G_n rispetto alle componenti del vettore $\boldsymbol{\alpha}$ e valutate nel punto fisso; risulta

$$G_{n,\alpha}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)G_{F,\alpha}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*)$$

Poiché $G_{F,\alpha}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}_t) = \boldsymbol{\alpha}_t$ per ogni $\boldsymbol{\alpha}_t$, la matrice $G_{F,\alpha}(\mathbf{x}^*, \cdot)$ coincide con la matrice identica e quindi la matrice $G_{n,\alpha}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*)$ ha tutti gli autovalori uguali a $(1 - \frac{1}{n})$. Quindi, dato che per ipotesi $\boldsymbol{\alpha}^* \in \mathcal{E}(\mathbf{x}^*)$, $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*)$ è iperbolico attrattivo per la mappa (M_n) .

- La [B2] è banalmente verificata.
- Infine osserviamo che:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\alpha}^* - G_n(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}_t)\| &= \left\| \boldsymbol{\alpha}^* - \frac{1}{n}\boldsymbol{\alpha}^* - \left(1 - \frac{1}{n}\right)G_F(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}_t) \right\| = \\ &= \left\| \left(1 - \frac{1}{n}\right)\boldsymbol{\alpha}^* - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\boldsymbol{\alpha}_t \right\| = \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\|\boldsymbol{\alpha}^* - \boldsymbol{\alpha}_t\| < \gamma\|\boldsymbol{\alpha}^* - \boldsymbol{\alpha}_t\| \end{aligned}$$

avendo posto $(1 - \frac{1}{n}) < \gamma < 1$. Questo completa la dimostrazione. ■

Osservazione 1.22 *In quest'ultimo teorema ci siamo dovuti accontentare di una successione che approssimi la funzione data convergendovi solo puntualmente. Infatti la distanza fra le immagini di un punto dato, $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}_t)$, ottenute attraverso una funzione appartenente a \mathcal{G}_F ed una appartenente a \mathcal{G} è, per un dato γ ,*

$$\|G_F(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}_t) - G(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}_t)\| = \|\boldsymbol{\alpha}_t - G(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}_t)\| \geq (1 - \gamma) \|\boldsymbol{\alpha}^* - \boldsymbol{\alpha}_t\|$$

che può essere resa grande a piacere qualora il dominio sia illimitato. Il problema può essere facilmente risolto dotando lo spazio Γ di una metrica diversa. Consideriamo infatti

$$\hat{d}(f, g) = \sum_i \frac{\sigma_i(f, g)}{2^i}$$

con

$$\sigma_i(f, g) = \frac{d_i(f, g)}{1 + d_i(f, g)}$$

dove $d_i(f, g)$ è la metrica della C^1 -convergenza uniforme sul compatto K_i della Definizione 1.8 e quindi $\sigma_i(f, g)$ è la metrica di Poincaré associata alla distanza d_i . Si può dimostrare che $\hat{d}(f, g)$ è una distanza e che la topologia da questa indotta su ogni compatto K_i è equivalente a quella indotta da d_i . Con questa distanza sarebbe possibile trovare una successione che converga uniformemente alla funzione data; questo sarebbe possibile però solo al costo di utilizzare una metrica che annulla la distanza puntuale fra le funzioni man mano che ci si allontana dall'origine. Questo potrebbe non essere un costo eccessivo visto che, in generale, i modelli economici possono essere considerati significativi, al più, a livello locale. Al tempo stesso con tale metrica, per ogni funzione costante e per ogni $\varepsilon > 0$, vi sono funzioni divergenti che risultano esserle ε -vicine; fatto, questo, particolarmente controintuitivo. In ogni caso vedremo nell'Osservazione 1.23 che riducendo l'attenzione ai compatti e con la metrica τ_1 si può ottenere il risultato voluto della convergenza uniforme.

Osservazione 1.23 *Se consideriamo soltanto l'insieme funzioni definite su un compatto e differenziabili con continuità, dotato della metrica τ_1 della C^1 -convergenza uniforme il teorema 1.21 può essere dimostrato cambiando la tesi in:*

[...Allora, per ogni $G_F \in \mathcal{G}_F \subset \Gamma$ esiste una successione $\{G_n\}$, con $G_n \in \mathcal{G} \subset \Gamma$ per ogni n , tale che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n = G_F$$

...].

La dimostrazione resta invariata per la parte esistente; resta da far vedere che la successione converge uniformemente a G_F . In effetti si ha:

$$\tau_1(G_n, G_F) = \max_{(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t) \in K} (\|G_n - G_F\| + \|DG_n - DG_F\|)$$

dove $\|G(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t)\|$ è la norma euclidea in \mathbb{R}^n e $\|DG(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t)\|$ è la norma della matrice Jacobiana $DG(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t)$ definita da

$$\|DG(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t)\| = \max_{\|v\|=1} \|DG(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t)v\|$$

D'altra parte è

$$\|G_n - G_F\| = \frac{1}{n} \|\boldsymbol{\alpha}^* - G_F(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t)\|$$

mentre

$$\|DG_n - DG_F\| = \|D(G_n - G_F)\| = \frac{1}{n} \|D(\boldsymbol{\alpha}^* - G_F(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t))\|$$

e quindi

$$\tau_1(G_n, G_F) = \frac{1}{n} \max_{(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t) \in K} (\|\boldsymbol{\alpha}^* - G_F(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t)\| + \|D(\boldsymbol{\alpha}^* - G_F(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t))\|)$$

e poiché entrambe le norme sono limitate, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che per ogni $n > n_\varepsilon$ risulta

$$\tau_1(G_n, G_F) < \varepsilon$$

e il risultato è dimostrato.

A questo punto potremmo considerare raggiunto l'obiettivo principale di questo lavoro. I risultati fin qui raggiunti sono caratterizzati da due semplificazioni significative; in effetti abbiamo sempre considerato modelli con agente rappresentativo, per di più identificando in un meccanismo di tipo adattivo la legge attraverso la quale vengono aggiornate le aspettative. Entrambi sembrano limitare eccessivamente l'ambito di applicazione dei risultati raggiunti. In quanto segue cercheremo di rimuoverli.

1.5 Agenti eterogenei

Vediamo brevemente come i metodi descritti nella sezione 1.4 possono essere adattati e risultare validi anche nel caso di agenti eterogenei.

Ammettiamo che nel mercato cui siamo interessati interagiscano n agenti indicati da $i = 1, \dots, n$. Per semplicità, siamo interessati alla classe di modelli forward-looking del tipo

$$x_t = L(x_{t+1}^1, x_{t+1}^2, \dots, x_{t+1}^i, \dots, x_{t+1}^n) \quad (1.28)$$

dove con x_{t+1}^i si indicano le aspettative al tempo t che l'agente i formula a proposito del valore assunto dalla variabile di stato x al tempo $t+1$, e L è una funzione C^1 . Notiamo che gli equilibri di perfetta previsione per il modello con agenti eterogenei sono caratterizzati dal fatto che gli n agenti prevedano perfettamente il futuro e perciò in equilibrio sarà $x_t = x_t^1 = \dots = x_t^n$. Il modello con agenti eterogenei in (1.28) può essere derivato dal modello con agenti omogenei in (1.4), in modo che F e L condividano i punti fissi e le soluzioni periodiche (equilibri stazionari di perfetta previsione e cicli). I modi più naturali di specificare una L con tale proprietà sono i seguenti:

$$L(x_{t+1}^1, x_{t+1}^2, \dots, x_{t+1}^i, \dots, x_{t+1}^n) = F\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{t+1}^i\right) \quad (1.29)$$

$$L(x_{t+1}^1, x_{t+1}^2, \dots, x_{t+1}^i, \dots, x_{t+1}^n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(x_{t+1}^i) \quad (1.30)$$

Grandmont in [35]³ tratta il problema introducendo una *funzione aspettativa media*; data Ψ_i la funzione aspettativa dell'agente i , considera

$$\Psi = \sum_{i=1}^n a_i \Psi_i$$

³I due casi non sono perfettamente confrontabili poiché in [35] la funzione aspettativa Ψ dipende solo dalle ultime n osservazioni x_{t-1}, \dots, x_{t-n} , mentre nel caso di aspettative adattive c'è dipendenza da tutte le infinite osservazioni passate; inoltre Grandmont considera un modello sottostante in cui il valore assunto da x_t dipende, oltre che dalle aspettative degli agenti, anche (autonomamente) da x_{t-1} , al contrario della funzione L da noi considerata.

dove con a_i si indica la derivata della funzione L rispetto alla i -esima componente. Attraverso Ψ riduce poi il modello alla

$$L(\Psi_1, \dots, \Psi_n) = F \left(\sum_{i=1}^n a_i \Psi_i \right)$$

in maniera molto simile alla (1.29) e mostra che in tal caso l'eterogeneità non modifica i risultati raggiunti. Nondimeno l'ipotesi di eterogeneità pone quesiti che richiederebbero ulteriore approfondimento. Benché le funzioni aspettativa individuali possano manifestare differenze anche consistenti e, in alcuni casi, tali da generare dinamiche non convergenti all'equilibrio di perfetta previsione, a livello aggregato tali differenze scomparirebbero e il sistema potrebbe risultare stabile. Viceversa, un piccolo gruppo di agenti potrebbe essere in grado da solo di spingere il sistema lontano dall'equilibrio. Se l'aumentare dell'eterogeneità porti ad una maggiore o minore stabilità del sistema è argomento ampiamente dibattuto. Generalmente si assume che “*heterogeneity doesn't matter*” anche se non mancano risultati contrari (vedi [8] per un esempio di modello OLG in cui l'eterogeneità conduce ad una maggiore instabilità del sistema). Nel nostro caso i risultati ottenuti nelle sezioni precedenti vengono confermati, come vedremo adesso.

Nel caso di agenti eterogenei il sistema può essere descritto nel modo seguente. Poniamo $(x_t^1, \dots, x_t^i, \dots, x_t^n) = \mathbf{x}_t^e \in \mathbb{R}^n$, $x_t \in \mathbb{R}$, $(\alpha_{1,t}, \dots, \alpha_{i,t}, \dots, \alpha_{n,t}) = \boldsymbol{\alpha}_t \in \mathbb{R}^n$. Consideriamo un generico modello forward-looking,

$$x_t = L(\mathbf{x}_{t+1}^e) = L(x_{t+1}^1, x_{t+1}^2, \dots, x_{t+1}^i, \dots, x_{t+1}^n)$$

analizzato nell'ipotesi di razionalità limitata. Gli agenti formulino le proprie aspettative sulla variabile come combinazione lineare convessa delle ultime previsioni effettuate e dell'ultimo valore osservato della variabile (ovvero abbiano aspettative adattive), $x_{t+1}^i = E_i(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t) = x_t^i + \alpha_{i,t}(x_{t-1} - x_t^i)$, $i = 1 \dots n$, dove il peso $\alpha_{i,t}$ non sia dato ma venga aggiornato in ogni periodo sulla base di una legge del tipo $\boldsymbol{\alpha}_{t+1} = g(\mathbf{x}_t^e, \mathbf{x}_{t+1}^e, x_{t-1}, x_t, \boldsymbol{\alpha}_t) = G(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t) = (G_1(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t), \dots, G_n(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t))$.

Posto A_t la matrice diagonale con $a_{i,i} = \alpha_{i,t}$, $\mathbf{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{L}(\mathbf{x}_{t+1}^e) = (L(\mathbf{x}_{t+1}^e), \dots, L(\mathbf{x}_{t+1}^e))$, il sistema diventa

$$(P_E) : \begin{cases} \mathbf{x}_{t+1}^e = E(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t) = \mathbf{x}_t^e + A_t [\mathbf{L}(\mathbf{x}_{t+1}^e) - \mathbf{x}_t^e] \\ \boldsymbol{\alpha}_{t+1} = G(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t) \end{cases} = \quad (1.31)$$

$$= \begin{cases} x_{t+1}^1 = E_1(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t) = x_t^1 + \alpha_{1,t} [L(\mathbf{x}_t^e) - x_t^1] \\ \dots \\ x_{t+1}^n = E_n(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t) = x_t^n + \alpha_{n,t} [L(\mathbf{x}_t^e) - x_t^n] \\ \alpha_{1,t+1} = G_1(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t) \\ \dots \\ \alpha_{n,t+1} = G_n(\mathbf{x}_t^e, \boldsymbol{\alpha}_t) \end{cases} \quad (1.32)$$

Risulta immediatamente chiaro che, così riscritto, il sistema con agenti eterogenei 1.31 diventa molto simile al caso n -dimensionale 1.19. Infatti analogamente al caso precedente si possono derivare le condizioni di stabilità. Se un vettore $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*)$ con $\alpha_i^* \neq 0, \forall i$, è uno stato stazionario per il sistema 1.31, allora il vettore \mathbf{x}^* è un equilibrio per la mappa $x_t = L(\mathbf{x}_{t+1}^e)$, ovvero è un equilibrio del modello analizzato nell'ipotesi di perfetta previsione. L'analisi locale di stabilità è analoga a quella condotta nel caso n -dimensionale con l'ovvia differenza interpretativa e le altrettanto ovvie sostituzioni del caso: $L(\mathbf{x}_{t+1}^e)$ al posto di $F_i(\mathbf{x}_{t+1}^e)$ e x_t^i al posto di $x_{i,t}^e$ per ogni i .

Adesso enunciamo nuovamente il teorema 1.3 adattandolo al caso in esame.

Teorema 1.24 *Siano date le seguenti ipotesi:*

[C1]. $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*)$ è un punto fisso asintoticamente stabile, localmente unico, per (P_E) ;

[C2]. $L, G \in C^1$;

[C3]. $\exists \gamma \in (0, 1) : \|\boldsymbol{\alpha}^* - G(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}_t)\| < \gamma \|\boldsymbol{\alpha}^* - \boldsymbol{\alpha}_t\| \quad \forall \boldsymbol{\alpha}_t \neq \boldsymbol{\alpha}^*$, dove $\|\cdot\|$ rappresenta la norma euclidea.

Allora, per ogni $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ esiste $\delta > 0$ (dipendente da $\boldsymbol{\alpha}$) tale che

$$B_\delta(\mathbf{x}^*) \times \{\boldsymbol{\alpha}\} \subset \mathfrak{B}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*) \quad (1.33)$$

dove $B_\delta(\mathbf{x}^*)$ è una palla di raggio δ centrata in \mathbf{x}^* .

Dimostrazione.

La dimostrazione si ottiene ricalcandola su quella data per il caso n -dimensionale. In particolare questa rimane completamente invariata nella prima parte (fino alla (1.24)) e successivamente continua a funzionare sostituendo $\mathbf{L}(\cdot)$ a $F(\cdot)$. ■

1.6 Generiche funzioni aspettativa

Vediamo a questo punto come può essere generalizzata l'ipotesi riguardante la funzione aspettativa utilizzata dagli agenti. Fin'ora abbiamo sempre ipotizzato che gli agenti utilizzassero una funzione aspettativa di tipo adattivo. Tale ipotesi è stata fatta per garantire una maggiore intelligibilità dei risultati ottenuti, nella convinzione che comunque non rappresentasse una limitazione eccessiva vista la frequenza con cui è presente in letteratura. Nondimeno tale ipotesi non è strettamente necessaria all'ottenimento dei risultati ed è possibile rimuoverla con poco dispendio di energie. Per fare ciò sarà necessario un piccolo cambio di prospettiva. Le aspettative adattive sono formate attraverso una media pesata delle infinite osservazioni passate. Per semplicità, nel passare ad un caso più generale, considereremo agenti che formulino le proprie aspettative considerando soltanto un numero finito, prefissato, di osservazioni. Questo approccio ha anche il vantaggio di consentirci un rapporto diretto con altri risultati presenti in letteratura, in particolare [31, 35] in cui l'analisi è condotta sotto tale ipotesi.

Volendo abbandonare l'ipotesi di aspettative adattive dovremo quindi dare alcune indicazioni sul modo in cui gli agenti prevedono il futuro, sulla base delle loro informazioni sul funzionamento del sistema e della storia passata. Ammettiamo quindi che gli agenti formino le loro previsioni sulla base dell'ultima osservazione e di un numero finito di dati passati. Consideriamo il semplice caso in cui lo stato del sistema è completamente descritto, ad ogni istante, da un singolo valore reale $x_t \in \mathbb{R}$, e concentriamoci su un semplice modello forward-looking $x_t = F(x_{t+1}^e)$. Sia, come al solito, $x^* = F(x^*)$ l'equilibrio di perfetta previsione, indichiamo con $\mathbf{x}_t = (x_t, \dots, x_{t-n})$ il vettore delle ultime $n + 1$ osservazioni e con $\mathbf{x}_t^e = (x_t^e, \dots, x_{t-n}^e)$ il vettore delle ultime $n + 1$ previsioni. Ipotizziamo, in accordo a quanto visto nelle sezioni precedenti, che ad ogni data gli agenti scelgano la funzione aspettativa in un insieme, parametrizzato da $\alpha_t \in \mathbb{R}$, anche tenendo in considerazione le ultime osservazioni \mathbf{x}_t (il che, come abbiamo visto in precedenza comprende anche i casi interessanti in cui gli agenti hanno riguardo agli ultimi errori commessi). Il sistema si può scrivere come un sistema di due equazioni alle

differenze finite di ordine $n + 1$:

$$(P_{gen}) = \begin{cases} x_{t+1}^e = e(\mathbf{x}_{t-1}, \alpha_t) = e(\mathbb{F}(\mathbf{x}_t^e), \alpha_t) \\ \quad = E(\mathbf{x}_t^e, \alpha_t) \\ \alpha_{t+1} = g(\mathbf{x}_{t-1}, \alpha_t) = g(\mathbb{F}(\mathbf{x}_t^e), \alpha_t) \\ \quad = G(\mathbf{x}_t^e, \alpha_t) \end{cases} \quad (1.34)$$

dove con $\mathbb{F}(\mathbf{x}_t^e) \in \mathbb{R}^n$ si indica il vettore la cui componente i -esima è uguale all'immagine attraverso F della previsione relativa a $i+1$ periodi antecedenti, $\mathbb{F}(\mathbf{x}_t^e) = (F(x_t), \dots, F(x_{t-n}))$. Dobbiamo imporre sulla funzione aspettativa E le condizioni che ci garantiscono di poter replicare il risultato dato nel teorema 1.3. Fortunatamente è sufficiente chiedere che sia verificata la *condizione di razionalità* (1.1) che è anche necessaria per attribuire significatività economica al modello; ammettiamo quindi che, in equilibrio, quando gli agenti osservano un vettore $\mathbf{x}^* = (x^*, \dots, x^*)$ la previsione confermerà x^* . Vale la pena osservare che formando le aspettative attraverso la regola adattiva tale condizione viene soddisfatta; in realtà le aspettative adattive soddisfano

Le ipotesi del modello sono:

[D1]. (x^*, α^*) è un punto fisso asintoticamente stabile, localmente unico, per (P_{gen}) ;

[D2]. F, e, g sono differenziabili con continuità;

[D3]. $\exists \gamma \in (0, 1) : |\alpha^* - G(\mathbf{x}^*, \alpha_t)| < \gamma |\alpha^* - \alpha_t| \quad \forall \alpha_t \neq \alpha^*$;

[D4]. $E(\mathbf{x}^*, \alpha_t) = x^* \quad \forall \alpha_t$

Sotto tale ipotesi è possibile dimostrare:

Lemma 1.25 *Per il sistema (P_{gen}) , date le ipotesi [D1], [D2], [D3] e [D4], per ogni $\hat{\alpha}_0 \neq \alpha^*$ esistono due successioni monotone $\{\hat{\alpha}_n\}, \hat{\alpha}_n \rightarrow +\infty$, $\{\hat{\beta}_n\}, \hat{\beta}_n \rightarrow -\infty$, $\hat{\alpha}_n > \hat{\beta}_n$ ed una successione positiva, non-crescente $\{\delta_n\}$, tale che*

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_t^e, \alpha_t) &\in I_{\delta_{n+1}}(\mathbf{x}^*) \times \left\{ [\hat{\alpha}_n, \hat{\alpha}_{n+1}] \cup [\hat{\beta}_{n+1}, \hat{\beta}_n] \right\} \\ &\quad \Downarrow \\ (x_{t+1}^e, \alpha_{t+1}) &\in I_{\delta_n}(x^*) \times (\hat{\beta}_n, \hat{\alpha}_n) \end{aligned}$$

Teorema 1.26 *Sotto le ipotesi [D1], [D2], [D3] e [D4], per ogni $\alpha \in \mathcal{A}$ esiste un δ positivo (dipendente da α) tale che*

$$I_\delta(x^*) \times \{\alpha\} \subset \mathfrak{B}(x^*, \alpha^*) \quad (1.35)$$

dove $\mathfrak{B}(x^*, \alpha^*)$ è il bacino di attrazione di (x^*, α^*) .

Dimostrazione.

Anche in questo caso le dimostrazioni possono essere ricalcate su quelle date per il Lemma 1.2 e per il Teorema 1.3. ■

Conclusioni al Capitolo 1

In questo capitolo abbiamo considerato un generale modello dinamico, potenzialmente consistente con un'ampia classe di modelli economici caratterizzati da razionalità limitata. Abbiamo cercato di superare alcuni dei limiti di tali modelli; in particolare il fatto che sotto certe condizioni la dinamica risulta convergente a cicli di non perfetta previsione. Questo implica che gli agenti commettono degli errori sistematici che caratterizzano il comportamento di equilibrio dell'economia.

Abbiamo mostrato che attribuendo maggiori capacità agli agenti, in particolare dotandoli della capacità di modificare la loro *funzione aspettativa* sulla base delle passate performance ottenute, la stabilità del sistema aumenta e che sotto certe condizioni i cicli di non perfetta previsione, pur non essendo in generale rimossi, non possono essere più appresi. La dinamica del sistema converge ad una situazione in cui *le profezie si autorealizzano*.